

G. M. BRUÑO

PRONTUARIO
DE
MECÁNICA



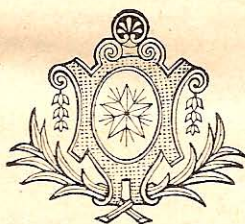
Madrid Bravo Murillo 106

PRONTUARIO
DE
MECÁNICA
TEÓRICA Y PRÁCTICA

SEGUIDO DE PROBLEMAS

POR

G. M. BRUÑO



MADRID: BRAVO MURILLO, 106

BARCELONA
CAMEROS, 8

PARÍS
RUE DE SÈVRES, 78

ES PROPIEDAD

L. M. Arriaga

INTRODUCCIÓN HISTÓRICA

La Mecánica en la Antigüedad.

La Mecánica es una ciencia moderna; sus aplicaciones industriales son contemporáneas.

En la antigüedad los hombres usaron armas, herramientas y aparatos rudimentales que fueron perfeccionando con la experiencia; pero, antes de Arquímedes, ninguna teoría parece haber inspirado a los constructores e inventores.

Arquímedes (287-212 a. de J. C.), precisa la noción del centro de gravedad en su *Mecánica*, expone la teoría de la palanca en su *Tratado del equilibrio*. Su genio práctico se ejercita durante la defensa de Siracusa; inventa una máquina para elevar el agua (tornillo de Arquímedes).

Herón de Alejandría (siglo II a. de J. C.) estudia las máquinas conocidas en su tiempo y describe la eolípila de vapor.

Papo de Alejandría (siglo III de nuestra era) da los teoremas conocidos más tarde con el nombre de *Guldin*, y la teoría de las máquinas simples, basada sobre la de la palanca.

La Mecánica en los tiempos modernos.

De Arquímedes a Galileo permanece estacionaria la Mecánica.

Entre los precursores de Galileo citaremos a **Leonardo de Vinci** (1452-1519), a **Cardan** (1501-1576), a **Stévin** (1548-1620), que estudia el paralelogramo de las fuerzas.

Galileo (1564-1642) basa en experimentos precisos sus teorías: leyes de la caída de los cuerpos, isocronismo de las oscilaciones pendulares, movimiento de los proyectiles. Sus descubrimientos astronómicos son los que le han hecho célebre.

Kepler (1571-1630) enuncia, por primera vez, las leyes del movimiento de los planetas alrededor del Sol.

Guldin (1577-1643) descubre nuevamente los teoremas de *Papo*, relativos a las superficies y a los volúmenes de revolución.

Descartes (1596-1650) precisa el principio de la inercia y la noción de cantidad de movimiento.

Roberval (1602-1675) imagina la balanza de platillos superiores.

Torricelli (1608-1647) establece la teoría de la salida de los líquidos.

Mariotte (1620-1684) descubre la ley de la expansión de los gases.

Pascal (1623-1662) demuestra la transmisión de la presión en los líquidos e inventa la prensa hidráulica.

Huyghens (1629-1695) descubre las propiedades del péndulo cicloidal, construye relojes y un motor de pólvora.

Lahire (1640-1719) estudia la epicicloide, curva que sirve de perfil a los dientes de engranaje.

Newton (1642-1727), en sus *Principios matemáticos de la Filosofía natural*, demuestra que las leyes de Kepler se explican por la fuerza atractiva del Sol. La atracción es proporcional a las masas e inversamente proporcional al cuadrado de las distancias; es universal y se extiende a todos los cuerpos celestes. La gravedad terrestre no es sino un caso particular de la atracción universal.

Debe aún la Mecánica al genio de Newton el principio de la acción y la reacción, la distinción entre la masa de un cuerpo y su peso.

Leibniz (1646-1716) da a conocer el teorema de las fuerzas vivas.

Alembert (1717-1783), en su *Tratado de Dinámica*, indica un método general que reduce el estudio del movimiento de los cuerpos al de su equilibrio.

Lagrange (1736-1813) publica su *Mecánica analítica*, basada sobre el principio del trabajo virtual.

Laplace (1749-1827) completa la obra de Newton en sus libros notables *Mecánica celeste* y *Exposición del sistema del mundo*.

Varignon (1654-1722) es conocido por la teoría de los momentos de las fuerzas.

Vaucanson (1709-1782) perfecciona la cadena articulada y los telares.

Coulomb (1736-1806) y el general **Morin** (1795-1880) experimentan las leyes del rozamiento.

Prony (1755-1839) inventa el freno dinamométrico para el ensayo de los motores.

Peaucellier descubre el inversor o rombo articulado.

La Mecánica industrial.

En el siglo XIX la *máquina de vapor* toma gran incremento.

Papin (1647-1710) construye una máquina atmosférica, en que el cilindro sirve sucesivamente de caldera y de condensador.

Watt (1736-1819), inventor genial, perfecciona considerablemente la máquina de vapor. Descubre importantes mejoras: el funcionamiento de doble efecto con expansión y condensación, la envoltura del cilindro, el paralelogramo articulado, el regulador centrífugo.

La industria, la navegación, los ferrocarriles utilizan sus descubrimientos.

El marqués de **Jouffroy** (1751-1832) y **Fulton** (1764-1815) hacen los primeros ensayos de navegación a vapor.

Stephenson (1781-1848) crea la locomotora y empieza la red férrea de Inglaterra.

Seguin (1786-1875) construye la caldera tubular.

Carnot (1796-1832), fundador de la Termodinámica con su memoria : *Reflexiones sobre la potencia motora del fuego*, abre el camino a nuevos inventores.

Ericsson (1803-1889) perfecciona los motores de aire caliente.

Mayer (1814-1878) y **Joule** (1818-1889) miden la equivalencia mecánica del calor.

Lenoir (1822-1900) y **Otto** (1832-1891) construyen los primeros motores de gas.

Brayton estudia el *motor de petróleo*, alma del automóvil y del avión; **Diesel** lo aplica a la navegación submarina.

Hoy día el empleo de las *turbinas de agua o de vapor* se generaliza en las fábricas de electricidad.

Euler (1707-1783) inventa la turbina de su nombre.

Poncelet (1788-1867) y **Sagebien** perfeccionan la rueda hidráulica.

Fourneyron (1802-1867), **Fontaine**, **Francis**, **Pelton**, adaptan la turbina hidráulica a las necesidades de la industria moderna.

Laval construye la turbina de vapor con rueda única; **Parsons** la mejora mediante la expansión del vapor en ruedas múltiples.

PRONTUARIO DE MECÁNICA

TEÓRICA Y PRÁCTICA

PRELIMINARES

TEORÍA DE LOS VECTORES

§ 1. — MAGNITUDES GEOMÉTRICAS

1. Eje orientado. — Sea una recta indefinida $X'X$ (fig. 1). Un móvil que recorre dicha recta puede moverse ya en el sentido $X'X$, ya en el sentido opuesto XX' .

Convengamos en elegir uno, $X'X$ por ejemplo, como *sentido positivo*; el otro XX' será el *sentido negativo*.

Llámase **eje orientado** cualquier recta indefinida en la que se elige un sentido positivo.

Se indica dicho sentido con una flecha.

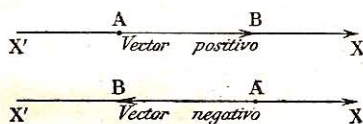


Fig. 1. — Eje orientado. — Vector.

2. Vector. — A) **Definición.** — Se llama **vector** un segmento de recta AB (fig. 1), llevado sobre un eje orientado $X'X$.

Uno de los puntos A es el *origen*, el otro B , el *extremo* del vector.

Un vector queda definido por cuatro elementos:

- 1º Su *origen*, o punto de aplicación A ;
- 2º Su *dirección*, que es la del eje orientado $X'X$;
- 3º Su *sentido*: el del movimiento de un móvil que fuera de su origen A a su extremo B ; se indica con una flecha en B ;
- 4º Su *magnitud*, que es la longitud del segmento AB .

B) **Signos.** — Cuando el sentido del vector coincide con el sentido positivo del eje, se trata de un *vector positivo*; en el caso contrario, de un *vector negativo* (fig. 1).

La magnitud de un vector, o su valor absoluto, es un número aritmético. Se le antepone el signo $+$ o el signo $-$, conforme es el vector positivo o negativo.

Observación. — Se designa el vector con una sola letra cuando no cabe duda acerca de los elementos de dicho vector.

C) Clases. — Dos vectores son :

Idénticos, cuando se confunden ;

Equivalentes, cuando sólo difieren en su origen ;

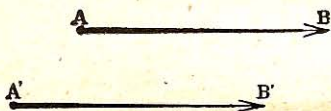


Fig. 2. — Vectores equipolentes.

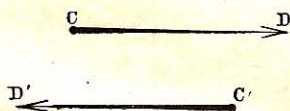


Fig. 3. — Par de vectores.

Equipolentes, cuando son paralelos, de igual sentido y de igual magnitud (fig. 2).

Dos vectores forman *un par*, cuando son paralelos y de igual magnitud, pero de sentido contrario (fig. 3).

§ 2. — SUMAS Y DIFERENCIAS GEOMÉTRICAS

3. Suma geométrica de vectores. — A) Dos vectores. — Sean dos vectores P y Q (fig. 4).

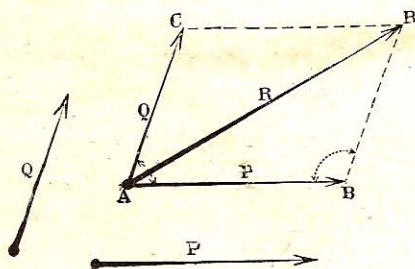


Fig. 4. — Suma geométrica de dos vectores.

1º Se llama *suma geométrica* de estos dos vectores, respecto de un punto A, el vector R, diagonal del *paralelogramo* ABRC, que tiene por lados vectores equipolentes a P y Q.

2º En el caso particular en que ambos vectores son *concurrentes* en el punto A, su suma geométrica se llama *resultante*, y los vectores son sus *componentes*.

Representase una suma geométrica por el símbolo :

$$(R) = (P) + (Q);$$

en que los paréntesis sirven para distinguirla de una suma algebraica.

B) **Tres vectores.** — Sean tres vectores P_1, P_2, P_3 , no paralelos a un mismo plano (fig. 5).

1º Se llama *suma geométrica* de estos tres vectores, respecto de un punto A, el vector R, diagonal del paralelepípedo que tiene por lados vectores equipolentes a P_1, P_2, P_3 .

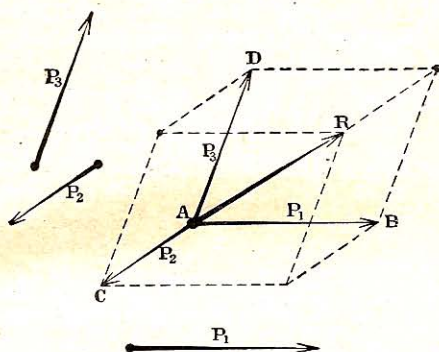


Fig. 5. — Suma geométrica de tres vectores.

2º En el caso particular en que los tres vectores son *concurrentes* en el punto A, su suma geométrica se llama *resultante* y los vectores son sus *componentes*.

El símbolo es : $(R) = (P_1) + (P_2) + (P_3)$.

C) **Sistema de vectores.** — Sean, en general, n vectores P_1, P_2, \dots, P_n , paralelos o no a un mismo plano (fig. 6).

1º Se llama *suma geométrica* de todos estos vectores respecto de un punto A, el vector R que cierra el *contorno poligonal* ABC ... R, cuyos lados son vectores equipolentes a P_1, P_2, \dots, P_n .

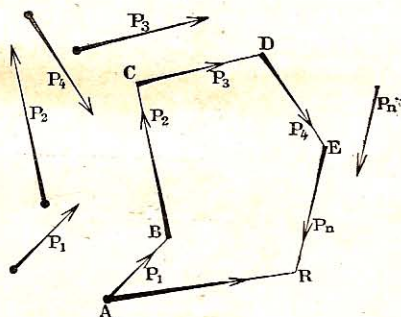


Fig. 6.

Suma geométrica de un sistema de vectores.

2º En el caso particular en que los vectores *concurrentes* en el punto A, se llama su suma geométrica *resultante*, y los vectores son las *componentes*.

El símbolo de esta suma geométrica es :

$$(R) = (P_1) + (P_2) + \dots + (P_n)$$

Observaciones. — 1º La suma es independiente del modo como se disponen los vectores equipolentes, con tal que el sentido del contorno de las componentes sea continuo.

2º *Componer vectores concurrentes* es determinar su resultante.

Descomponer un vector es contruir vectores de igual origen, que tengan dicho vector por resultante.

4. Diferencia geométrica de vectores concurrentes.

— La *diferencia geométrica* de dos vectores concurrentes, R y P, es un vector Q, tal que la resultante de P y de Q sea igual a R.

El simbolo de esta diferencia geométrica es :

$$(Q) = (R) - (P).$$

A) Descomposición en dos vectores. — Sea un vector AR, que ha de descomponerse según dos direcciones Ax y Ay, situadas en un mismo plano con AR (fig. 7).

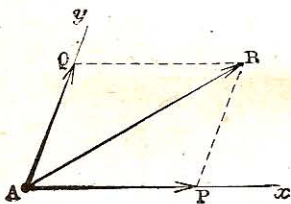


Fig. 7.
Descomposición en dos vectores.

Tracemos por el extremo R paralelas a las dos direcciones; cortan Ax y Ay en los puntos P y Q.

Como no existe sino un solo paralelogramo que tenga AR por diagonal y sus lados en Ax y Ay, los dos vectores AP y AQ, lados del paralelogramo, dan la única solución del problema.

Observación. — Cuando AR, Ax y Ay no están en el mismo plano, es imposible el problema.

B) Descomposición en tres vectores. — Sea un vector AR que ha de descomponerse según tres direcciones Ax, Ay, Az, las cuales forman un triedro en su vértice.

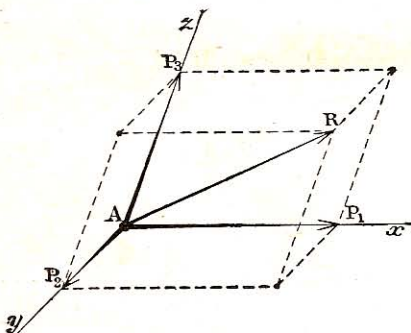


Fig. 8. — Descomposición en tres vectores.

Hagamos pasar por el extremo R, planos respectivamente paralelos a los tres planos zAy , zAx , yAx ; estos planos cortan las tres direcciones dadas en los puntos P_1 , P_2 , P_3 .

Como no existe más que un solo paralelepípedo que tenga AR por diagonal y sus aristas en Ax, Ay, Az, los tres vectores AP_1 , AP_2 , AP_3 , aristas del paralelepípedo, dan la única solución del problema.

Observación. — Cuando AR, Ax, Ay, Az, están en un mismo plano, hay una infinidad de soluciones.

§ 3. — PROYECCIONES DE VECTORES

5. **Proyección de un vector sobre un eje.** — Sean un eje orientado $X'X$, un vector AB y un plano P no paralelo al eje (fig. 9).

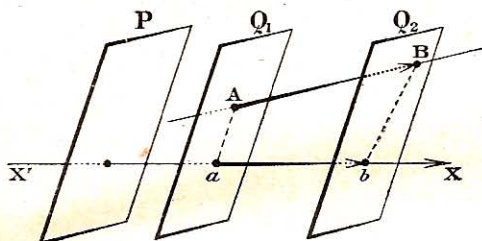


Fig. 9. — Proyección de un vector sobre un eje.

La *proyección de un punto A* sobre $X'X$ paralelamente al plano P es la intersección a del eje con el plano Q trazado por A paralelamente al plano P . Asimismo b es la proyección de B .

La *proyección de un vector AB* es el vector ab que une la proyección del origen A con la del extremo B .

Observaciones. — 1º La proyección se llama *ortogonal* cuando el plano P es perpendicular al eje.

2º En general el cuadrilátero $ABba$ es alabeado; es plano cuando el vector AB encuentra el eje.

6. **Teorema de las proyecciones.** — *La proyección de una suma geométrica sobre un eje es igual a la suma algebraica de las proyecciones de sus componentes sobre el mismo eje.*

Sea $ABC\dots R$ el contorno poligonal que forman los vectores equipolentes a los vectores dados P_1, P_2, \dots, P_n (fig. 10).

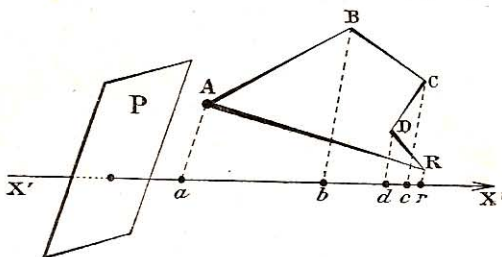


Fig. 10. — Proyección de una suma geométrica.

Proyectemos sobre el eje $X'X$, paralelamente al plano P sus diferentes vértices en a, b, c, \dots, r .

La proyección de la suma geométrica es ar .

El teorema de Mobius da :

$$ab + bc + \dots + dr + ra = 0, \quad (1)$$

cualquiera que sea la posición de las proyecciones sobre el eje $X'X$, y la de los vértices en el espacio.

De donde : $ab + bc + \dots + dr = -ra = ar,$ (2)
porque $ra + ar = 0.$

PRIMERA PARTE

CINEMÁTICA

GENERALIDADES

7. Divisiones de la Mecánica. — *La Mecánica es la ciencia del movimiento y de las fuerzas que lo producen.*

Se divide generalmente la Mecánica en tres partes :

1º La **Cinemática** (gr. *kinema*, movimiento), o ciencia del movimiento ;

2º La **Estática** (gr. *statikos*, que está en pie), o ciencia del equilibrio de las fuerzas ;

3º La **Dinámica** (gr. *dynamis*, fuerza), o ciencia de la relación entre las fuerzas y los movimientos.

8. Cinemática. — *La Cinemática es la ciencia del movimiento en su relación con el tiempo.*

Esta noción del tiempo diferencia la Cinemática de la Geometría.

9. Unidad de tiempo. — 1º La idea de tiempo nos es familiar. El día empieza al salir el sol y concluye al ponerse aquél, durando mientras está el astro visible en el horizonte. La « jornada » de un obrero se cuenta desde su entrada hasta su salida del taller.

2º El tiempo es una *magnitud mensurable*.

Dos fenómenos que empiezan y acaban juntos tienen la *misma duración* : si se verifican en condiciones idénticas, tienen *duraciones iguales*.

Las duraciones pueden sumarse entre sí, se les pueden aplicar las reglas de la *multiplicación* y de la *división*.

Así por ejemplo los días siderales son iguales, una semana comprende siete días, y el día es la séptima parte de la semana.

3º La unidad de tiempo es el *segundo sexagesimal* de tiempo medio, definido en Cosmografía.

10. Punto material. Cuerpo sólido. — En Mecánica, un *punto material* es una cantidad muy pequeña de materia, que se asimila con un punto geométrico.

Un *cuerpo sólido* es un sistema de puntos materiales, sujetos a conservar entre sí distancias mutuas invariables.

Pueden considerarse como tales los cuerpos llamados comúnmente sólidos, en Física.

En Cinemática se prescinde de la *materia* que constituye los cuerpos. Esto es lo que distingue la Cinemática de la Estática y de la Dinámica (78).

11. El movimiento es relativo. — El movimiento y el reposo de los cuerpos son esencialmente relativos.

1º Un *punto material* está *en reposo* respecto de un cuerpo sólido, cuando sus distancias a todos los puntos de éste permanecen invariables.

En el caso contrario, el punto está *en movimiento* respecto del sólido.

2º Un sólido está *en reposo* o *en movimiento* respecto de otro sólido cuando cada uno de los puntos del primero está *en reposo* o *en movimiento* respecto del segundo.

3º Un cuerpo puede estar a la vez *en reposo* respecto de un segundo cuerpo y *en movimiento* respecto de un tercero.

Por ejemplo un pasajero, en el barco que lo transporta, está *en reposo* respecto del barco, pero *en movimiento* respecto de la orilla o de la Tierra.

Siendo todos los movimientos relativos es necesario precisar el sólido a que se refieren el reposo o el movimiento de un punto material. Este sólido se llama *sistema de comparación*. La Tierra es el sistema generalmente empleado.

12. Divisiones de la Cinemática. — La Cinemática se divide en :

1º *Cinemática del punto material*, o estudio del movimiento de un punto ;

2º *Cinemática del cuerpo sólido*, o estudio del movimiento de un sistema de puntos ;

3º *Composición de los movimientos*, o estudio del movimiento respecto de sistemas de comparación variables ;

4º *Cinemática aplicada*, o estudio de los principales mecanismos.

CAPÍTULO I

CINEMÁTICA DEL PUNTO MATERIAL

SUMARIO :

- § 1. *Movimiento de un punto* : Trayectoria. Ecuación del movimiento.
§ 2. *Movimiento rectilíneo* : Movimiento uniforme. Diagramas. — Movimiento variado. — Movimiento uniformemente variado. Diagramas.
§ 3. *Caida de los cuerpos* : Aparato de Morin. Fórmulas.
§ 4. *Movimiento curvilíneo* : Movimiento curvilíneo variado. — Movimiento circular uniforme.

§ 1. — MOVIMIENTO DE UN PUNTO

13. Trayectoria de un punto. — Sea un punto material en movimiento respecto de un sistema de comparación.

La *trayectoria* es el lugar de las posiciones del móvil respecto del sistema de comparación. La trayectoria es una línea bien determinada.

Cuando la trayectoria es una recta, el movimiento se llama *rectilíneo*; cuando es una curva cualquiera, el movimiento se llama *curvilíneo*; cuando dicha curva es una circunferencia, el movimiento se llama *circular*.

14. Ecuación del movimiento. — Sea un móvil en movimiento sobre su trayectoria $S'S$ (fig. 11). Elijamos en dicha curva, un punto determinado O , como *origen de los espacios*, y OS como *sentido positivo* de la curva orientada.

A un instante t corresponde una posición M del móvil, posición determinada por el valor algebraico del arco $s = OM$, que se llama *espacio en el instante t* .

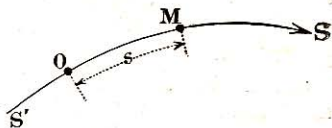


Fig. 11. — Trayectoria.

A cada valor del tiempo t corresponde un valor único de s ; el espacio es pues una función del tiempo.

Esta relación $s = f(t)$ se llama *ecuación del movimiento del móvil sobre su trayectoria*.

Según la forma de dicha ecuación, el movimiento de un punto puede ser *uniforme, uniformemente variado* o *variado cualquiera*.

Estudiemos estas diferentes clases de movimientos, empezando por los más sencillos. Veremos que existen siempre dos vectores notables, íntimamente unidos al movimiento: la *velocidad* y la *aceleración*.

§ 2. — MOVIMIENTO RECTILÍNEO

15. Movimiento rectilíneo uniforme. — 1º Definición. — Sea un móvil que recorre una *trayectoria rectilínea*, siempre en el mismo sentido.

Es su *movimiento uniforme* cuando los *espacios recorridos son proporcionales a los tiempos empleados en recorrerlos*.

2º Ecuación del movimiento. — Sea $X'X$ la trayectoria orientada, el sentido positivo es de X' hacia X ; el origen de los espacios es O (fig. 12).

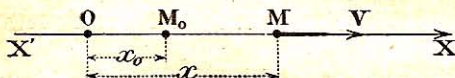


Fig. 12. — Movimiento rectilíneo uniforme. — Velocidad.

En el instante inicial, $t = 0$, el móvil está en M_0 ; en un instante cualquiera t , está en M ; x_0 y x son los espacios correspondientes.

El espacio recorrido durante el intervalo de tiempo t tiene por valor algebraico:

$$(x - x_0).$$

Siendo uniforme el movimiento, se tiene por definición:

$$\frac{x - x_0}{t} = C^{te} = v; \quad (1)$$

de donde:

$$x = x_0 + vt. \quad (2)$$

Así pues la *ecuación del movimiento es una función de primer grado en t* .

Cuando la constante $v > 0$, el espacio crece con el tiempo: el móvil se mueve en el *sentido positivo*, hacia X .

Cuando $v < 0$, el espacio decrece al aumentar el tiempo: el móvil se mueve en el *sentido negativo*, hacia X' .

3º **Velocidad.** — Se llama *velocidad de un movimiento uniforme*,

la relación constante entre el espacio recorrido y el tiempo empleado en recorrerlo.

Es la constante v de la ecuación (1) del movimiento.

Ahora bien, para $t=1$ en la ecuación (1) se tiene :

$$v = x - x_0. \quad (3)$$

Así pues, la velocidad es el espacio recorrido en la unidad de tiempo.

4º Vector velocidad. — Se representa geoméricamente la velocidad por un vector MV , llevado sobre la trayectoria orientada $X'X$. Su origen es el punto M , posición del móvil en el instante considerado; su sentido es el del movimiento; su magnitud es constante: $v = \pm k$ según se mueve el móvil en el sentido positivo o en el negativo de la trayectoria.

5º Unidades. — En la práctica los espacios se miden, según los casos, en centímetros, metros, kilómetros, etc.; y los tiempos se calculan en segundos, minutos, horas, etc.

El número que mide una velocidad depende de las unidades de longitud y de tiempo adoptadas.

Por ejemplo se dice indiferentemente que un automóvil tiene una velocidad de 15^m por segundo, o de 900^m por minuto, o de 54^{km} por hora.

Observación. — Recíprocamente, la ecuación del primer grado :

$$x = x_0 + vt,$$

en que son constantes x_0 , y , v , representa un movimiento uniforme.

En efecto, sean $x_1 = x_0 + vt_1$,

y $x_2 = x_0 + vt_2$,

los espacios recorridos en los tiempos t_1 y t_2 ($t_2 > t_1$).

1º x varía siempre en el mismo sentido, puesto que crece o decrece siempre según es v positivo o negativo;

2º el espacio recorrido durante el tiempo $t_2 - t_1$, es :

$$x_2 - x_1 = v(t_2 - t_1);$$

de donde la relación : $\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = v = Cte.$

El movimiento es pues uniforme.

16. Diagrama del movimiento uniforme. — 1º **Diagrama de los espacios.** — Es conveniente representar la ecuación del movimiento por un gráfico, que se llama *diagrama de los espacios*.

Para construirlo se trazan dos ejes rectangulares Ot y Ox , sobre los cuales se señalan los tiempos en abscisas y los espacios en ordenadas.

La ecuación del movimiento $x = x_0 + vt$ se representa por una recta AE (fig. 13).

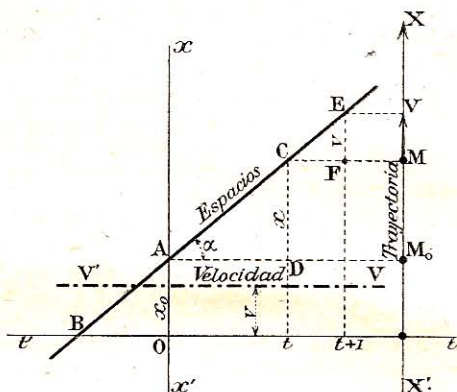


Fig. 13. — Diagrama del movimiento uniforme.

Sus coordenadas en el origen son :

$$OA = x_0 \quad \text{y} \quad OB = -\frac{x_0}{v}$$

2º Diagrama de las velocidades. — La velocidad constante $v = \pm k$ se representa por medio de una recta $V'V$ paralela al eje de los tiempos, y trazada encima o debajo de dicho eje, según sea la velocidad positiva o negativa.

Es éste el diagrama de la velocidad.

Observación. — La velocidad se representa en el diagrama de los espacios por el camino FE recorrido en la unidad de tiempo.

Se mide por el coeficiente angular de la recta AE,

pues
$$v = \frac{x - x_0}{t} = \frac{DC}{AD};$$

basta sólo que la unidad de espacio y la unidad de tiempo se representen por la misma longitud.

Luego
$$v = \operatorname{tg} \alpha.$$

17. Movimiento variado. Velocidad. — 1º Definición. — Todo movimiento que no es uniforme se llama *variado*.

La ecuación del movimiento no es ya una función del primer grado en t .

2º Velocidad media. — Sea un móvil animado de un movimiento variado sobre una trayectoria rectilínea $X'X$ (fig. 14).

En los instantes muy próximos t y $t + \Delta t$, ocupa las posiciones M y M_1 , de abscisas x y $x + \Delta x$; Δx es el espacio recorrido durante el tiempo Δt .

Se llama *velocidad media* de un movimiento variado, la relación entre el espacio recorrido y el tiempo empleado en recorrerlo.

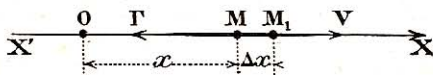


Fig. 14. — Movimiento rectilíneo variado.
Trayectoria. — Velocidad. — Aceleración.

Sea v_m la velocidad media.

Por definición:

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

3º Velocidad en el instante t . — La velocidad en el instante t es el límite hacia el cual tiende la velocidad media, cuando tiende Δt hacia cero.

Sea la velocidad v .

Por definición:

$$v = \lim \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}. \quad (1)$$

Así pues la velocidad es igual a la derivada del espacio respecto del tiempo.

4º Vector velocidad. — La velocidad se representa por medio de un vector MV , que, tiene, por origen la posición del móvil en el instante considerado (fig. 14). Por convención dicho vector se lleva sobre la trayectoria orientada $X'X$ y en el sentido del movimiento, puesto que si el móvil se mueve en el sentido positivo de la trayectoria, x crece, $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ y v son positivos; si el móvil se mueve en el sentido negativo de la trayectoria, x decrece y v es negativo.

Un movimiento variado se llama *acelerado* cuando el valor absoluto de la velocidad crece, se llama *retardado* cuando decrece aquél.

18. Movimiento variado. Aceleración. — La velocidad en un movimiento rectilíneo variado cambia de magnitud a cada instante. Se miden las variaciones de la velocidad por la *aceleración*, como se miden las variaciones del espacio por la velocidad.

1º Aceleración media. — Sean v y $v + \Delta v$ las velocidades de un móvil en los instantes t y $t + \Delta t$; Δv es la variación de la velocidad durante el tiempo Δt .

Se llama *aceleración media* de un movimiento variado, la relación entre la variación de la velocidad y la variación del tiempo.

† Cuando un viajero, sentado en un tren, dice: « En este momento llevamos una velocidad de 80 kilómetros por hora, » expresa una idea entendida por todo el mundo; el viajero quiere decir, en efecto, que, si el tren *siguiese andando* a la velocidad que tiene en el instante t considerado, recorrería 80 kilómetros en una hora. (P. APPELL, *Cours de Mécanique*.)

Sea γ_m la aceleración media.

Por definición:
$$\gamma_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Aceleración en el instante t . — La aceleración en el instante t es el límite hacia el cual tiende la aceleración media, cuando tiende Δt hacia cero.

Sea γ la aceleración.

Por definición:
$$\gamma = \lim. \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}.$$

Así pues la aceleración es igual a la derivada de la velocidad con relación al tiempo.

3º Vector aceleración. — La aceleración se representa por un vector $M\Gamma$ llevado sobre la trayectoria orientada, que tiene por origen el móvil en el instante considerado (fig. 14). Este vector está dirigido en el sentido del movimiento si la velocidad crece, o en el sentido contrario si la velocidad decrece.

Así pues, si el movimiento variado es *acelerado*, los vectores MV y $M\Gamma$ son de igual sentido; si es *retardado*, ambos vectores son de sentido contrario.

19. Movimiento uniformemente variado. — 1º Definición.

— El movimiento de un móvil es **uniformemente variado** cuando la velocidad varía proporcionalmente al tiempo.

Es éste el movimiento de todo cuerpo que cae, libremente, en el vacío, hacia la Tierra.

2º Velocidad. — Sean v_0 la velocidad en el instante inicial y v la velocidad en el instante t .

Por definición:
$$\frac{v - v_0}{t} = C^{te} = \gamma \quad (1)$$

de donde:
$$v = v_0 + \gamma t. \quad (2)$$

Así pues, la velocidad se expresa por una función del primer grado en t .

3º Aceleración. — En el movimiento uniformemente variado, la aceleración es constante.

Es la constante γ de la fórmula (1).

Ahora bien con
$$t = 1,$$

$$\gamma = v - v_0.$$

Así pues, la aceleración es la variación que sufre la velocidad durante la unidad de tiempo.

4º Ecuación del movimiento. — De la fórmula de las velocidades

$$v = \frac{dx}{dt} = v_0 + \gamma t,$$

se deduce la ecuación del movimiento.

Remontando a la función primitiva, tenemos :

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{\gamma t^2}{2}; \quad (3)$$

x_0 es una constante.

Para $t = 0$, $x = x_0$; esta constante es pues el *espacio inicial*.

La ecuación del movimiento es una función de segundo grado en t .

5º Ecuaciones reducidas. — Las fórmulas (2) y (3) se simplifican eligiendo convenientemente los orígenes. Si el origen de los tiempos es el instante en que se anula la velocidad, y el origen de los espacios la posición del móvil en dicho instante inicial,

$$t = 0, \quad v_0 = 0 \quad \text{y} \quad x_0 = 0.$$

Las fórmulas se convierten en :

$$v = \gamma t, \quad \text{y} \quad x = \frac{1}{2} \gamma t^2.$$

En este caso particular,

1º *Las velocidades son proporcionales a los tiempos;*

2º *Los espacios son proporcionales a los cuadrados de los tiempos.*

6º Vector velocidad. Vector aceleración. — *El vector velocidad* MV se lleva sobre la trayectoria orientada $X'X$ y se dirige en el sentido del movimiento (fig. 14).

Un movimiento es *uniformemente acelerado*, cuando el valor absoluto de la velocidad crece de una cantidad constante en la unidad de tiempo, y es *uniformemente retardado* cuando disminuye su velocidad.

El *vector aceleración* $M\Gamma$ se lleva sobre la trayectoria orientada $X'X$ (fig. 14). Su origen es la posición del móvil en el instante considerado, se dirige en el sentido de la velocidad o del movimiento si es uniformemente acelerado, o en el sentido contrario si es uniformemente retardado; su magnitud es constante : $\gamma = \pm k$, según se el movimiento acelerado o retardado.

Ejemplo : La caída de los cuerpos a la superficie de la Tierra es uniformemente acelerada, el incremento de la velocidad es $9^m,81$ por segundo (en París) : $\gamma = +9,81$.

20. Diagramas del movimiento uniformemente variado. — **1º Diagrama de los espacios.** — La ecuación del movimiento uniformemente variado :

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{\gamma t^2}{2},$$

se representa por una *parábola de eje vertical*, cuya concavidad está vuelta hacia arriba o hacia abajo según es $\gamma > 0$ (movimiento acele-

rado) o $\gamma < 0$ (movimiento retardado). La fig. 15 corresponde a

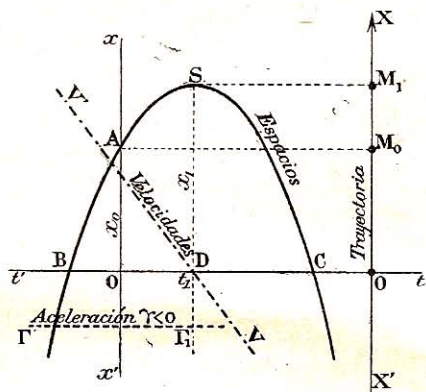


Fig. 15. — Diagramas del movimiento uniformemente variado.

este último caso. La ordenada del punto A es x_0 ; la abscisa del vértice S es :

$$t_1 = -\frac{v_0}{\gamma};$$

y su ordenada

$$x_1 = x_0 - \frac{v_0^2}{2\gamma}.$$

2º Diagrama de las velocidades. — La ecuación de las velocidades $v = v_0 + \gamma t$ se representa por una *recta* VV' ; es ascendente o descendente, en el sentido de Ot , según es $\gamma > 0$ (movimiento acelerado) o $\gamma < 0$ (movimiento retardado).

Esta recta corta el eje de los tiempos en un punto D , de abscisa :

$$t_1 = -\frac{v_0}{\gamma};$$

este punto D del diagrama de las velocidades corresponde al vértice S del diagrama de los espacios.

El instante t_1 divide la duración en dos periodos: antes de dicho instante, la velocidad era decreciente y el movimiento uniformemente retardado; a partir de dicho instante, la velocidad crece en valor absoluto y el movimiento se vuelve uniformemente acelerado (21).

3º Diagrama de las aceleraciones. — La aceleración constante $\gamma = \pm k$ se representa por medio de una *recta* paralela al eje de los tiempos; está colocada encima o debajo de dicho eje, según es el movimiento acelerado o retardado.

21. Discusión del movimiento uniformemente variado.

— El estudio simultáneo de los tres diagramas y de la trayectoria, permite una discusión sencilla.

Estudemos el caso en que, en el origen del movimiento, se da: $\gamma < 0$ (fig. 15).

El movimiento comprende dos fases:

1ª Fase. — Cuando crece t de $-\infty$ a $t_1 = -\frac{v_0}{\gamma}$, el móvil parte del infinito y camina de X' hacia X , en el sentido positivo de la trayectoria: se adelanta hasta la posición M , de abscisa:

$$x_1 = x_0 - \frac{v_0^2}{2\gamma},$$

con una velocidad decreciente y un movimiento uniformemente retardado. Allí se para, pues la velocidad se anula.

2ª Fase. — Cuando crece t de t_1 a $+\infty$, el móvil retrocede hacia X' , en el sentido negativo y con movimiento uniformemente acelerado; se aleja indefinidamente con una velocidad creciente en valor absoluto¹.

Observación. — Cuando se da $\gamma > 0$, la parábola vuelve su concavidad hacia arriba. Una discusión análoga muestra que el móvil parte del infinito, y se dirige de X hacia X' , hasta un punto en que se para, alejándose luego hasta el infinito hacia X .

La discusión algebraica, mediante la fórmula de la velocidad y la ecuación del movimiento, conduce a los mismos resultados.

§ 3. — CAÍDA DE LOS CUERPOS

22. Aparato de Morín. — La caída de los cuerpos a la superficie de la Tierra es un movimiento uniformemente acelerado.

Se demuestra por medio del plano inclinado de Galileo*, de la máquina de Atwood y del aparato de Morín*.

En los dos primeros se retarda el movimiento, sin cambiar su naturaleza de movimiento uniformemente acelerado, para facilitar las observaciones. — Estos aparatos se estudian en Física.

Aparato de Morín. — *Descripción.* — Este aparato se compone de

¹ Esta segunda fase está figurada por la porción SC de la parábola. Basta invertir la figura 15 para comprobar el carácter de un movimiento acelerado en los diagramas.

* Los nombres seguidos de un asterisco en esta obra son objeto de una mención biográfica en la *Introducción histórica*.

un cilindro vertical A, cubierto de una hoja de papel, y movido por un peso motor B (fig. 16).

El peso B hace girar una rueda C que engrana con dos tornillos sin fin : D mueve el cilindro y E un regulador de aletas F.

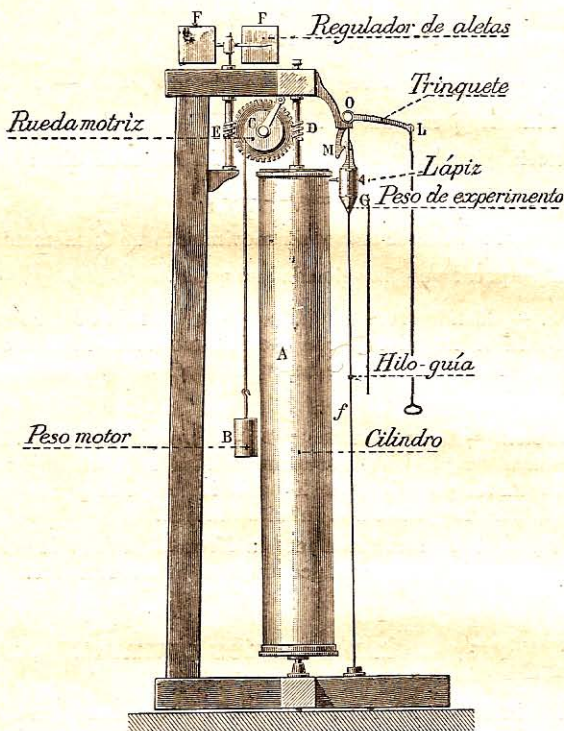


Fig. 16. — Aparato del general Morin.

El cuerpo pesado G, guiado por dos hilos metálicos f , lleva un lápiz que un muelle mantiene apoyado contra el papel del cilindro.

Cuando la rotación del cilindro se ha vuelto uniforme, se suelta el tope M; el peso G cae, y el lápiz traza sobre el papel el diagrama del movimiento.

Comprobación de la ley de caída. — Esta curva permite comprobar la ecuación del movimiento. Para ello se corta la hoja según una generatriz AA' del cilindro y se la desarrolla (fig. 17).

La curva se refiere a dos ejes : la generatriz AA' es el eje de los

espacios, la perpendicular AF, el eje de los tiempos. Se trazan sobre AF divisiones iguales que representan rotaciones equivalentes o tiempos iguales; luego por los puntos de división, se trazan paralelas a la generatriz.

La ley de los espacios es fácil de comprobar. En el origen de los tiempos el peso está en A; después del tiempo AB, el peso ha caído de una altura Bb; después de AC = 2AB, ha caído de un espacio Cc, etc.

Se miden Bb, Cc, Dd, Ee, etc., y se encuentra :

$$Cc = 4 Bb = Bb \times 2^2,$$

$$Dd = 9 Bb = Bb \times 3^2,$$

$$Ee = 16 Bb = Bb \times 4^2, \text{ etc.}$$

Los espacios recorridos por un cuerpo, en caída libre, son proporcionales a los cuadrados de los tiempos empleados en recorrerlos. Es pues el movimiento uniformemente acelerado (19).

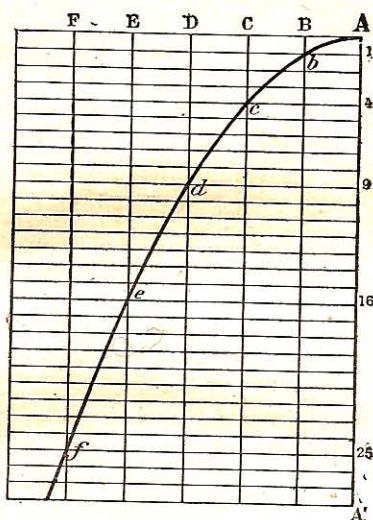


Fig. 17. — Aparato de Morin.
Curva representativa del movimiento.

Aceleración de la gravedad. — La aceleración de este movimiento de caída se llama *aceleración de la gravedad*.

Se la representa por g . — Su valor absoluto es 9,8088 metros en París, 9,831 metros en el polo, 9,781 metros en el ecuador.

23. Movimiento vertical de un punto grave. — 1º Caída.

— Se supone que el cuerpo se mueve en el vacío.

La aceleración es $\gamma = +g$.

Ecuaciones del movimiento. — Sea h la altura de caída desde el instante inicial.

Según sea la velocidad inicial nula o valga v_0 , se tiene :

$$h = \frac{1}{2} gt^2; \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{o} \quad h = v_0 t + \frac{1}{2} gt^2; \quad (1) \end{array} \right.$$

$$v = gt. \quad \left| \quad \begin{array}{l} v = v_0 + gt. \quad (2) \end{array} \right.$$

Velocidad al final de la caída. — Después de la caída h , el móvil posee una velocidad :

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}. \quad (3)$$

La fórmula (3) se deduce de (2) elevada al cuadrado :

$$v^2 = v_0^2 + 2v_0gt + g^2t^2,$$

o
$$v^2 = v_0^2 + 2g\left(v_0t + \frac{1}{2}gt^2\right) = v_0^2 + 2gh;$$

de donde
$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}.$$

Cuando
$$v_0 = 0, \quad v = \sqrt{2gh}.$$

Observación. — En la fórmula
$$h = \frac{1}{2}gt^2,$$
 si se hace $t = 1,$

$$h_1 = \frac{g}{2}; \quad \text{de donde} \quad g = 2h_1. \quad (4)$$

Así pues, la aceleración de la gravedad es igual al doble del espacio recorrido durante el primer segundo de caída.

2º Ascensión. — El móvil se lanza con una velocidad inicial v_0 .

El movimiento es uniformemente retardado.

Eligiendo como sentido positivo de la trayectoria el sentido de la ascensión: $\gamma = -g$.

Ecuaciones del movimiento. — Sea h la altura alcanzada por el móvil sobre el punto origen del movimiento.

Se tiene:
$$h = v_0t - \frac{1}{2}gt^2, \quad (1)$$

y
$$v = v_0 - gt. \quad (2)$$

La eliminación de t da:

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2gh}. \quad (3)$$

Duración y altura de la ascensión. — La ascensión terminal cuando la velocidad se anula, entonces:

$$v_0 = gt.$$

La duración de la ascensión es pues:

$$t = \frac{v_0}{g}.$$

La altura máxima, según, (1) es:

$$h = \frac{v_0^2}{g} - \frac{v_0^2}{2g} = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Observación. — Una caída del móvil sigue a su ascensión; dura el mismo tiempo t ; el móvil adquiere una velocidad $v = \sqrt{2gh} = v_0$, igual en valor absoluto a la velocidad inicial.

24. Problemas sobre la caída de los cuerpos. — 1º *Un cuerpo cae sin velocidad inicial, de una altura de 490^m,50. — Calcúlese el tiempo de su caída y su velocidad final ($g = 9^m,81$).*

El tiempo de caída
$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \times 490,5}{9,81}} = 10^s.$$

La velocidad
$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9,81 \times 490,5} = 98^m,1.$$

2º Un móvil es lanzado verticalmente de abajo arriba con una velocidad de 60 metros. Si se prescinde de la resistencia del aire ¿ a qué altura llegará? — ¿ Qué tiempo mediará entre su salida y su caída?

$$\text{La altura máxima } h = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{60^2}{2 \times 9,81} = 183\text{m},48.$$

El tiempo total es doble del de la ascensión :

$$t = \frac{2 v_0}{g} = \frac{2 \times 60}{9,81} = 12\text{s},23.$$

La velocidad debida a la caída es :

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9,81 \times 183,48} = 60 \text{ metros.}$$

§ 4. — MOVIMIENTO CURVILÍNEO

25. Movimiento curvilíneo. Velocidad. — La trayectoria es una curva (13).

Sean S'S la trayectoria orientada del móvil, y O el origen de los espacios.

En los instantes t y $t + \Delta t$, el móvil ocupa las posiciones M y M_1 , de abscisas s y $s + \Delta s$ (fig. 18).

1º **Velocidad media.** — Sobre la cuerda MM_1 , orientada en el sentido de la trayectoria, llevemos, en el sentido del movimiento, el vector MW de magnitud :

$$MW = \frac{\text{cuerda } MM_1}{\Delta t}.$$

Este vector MW se llama *velocidad media* del móvil durante el tiempo Δt .

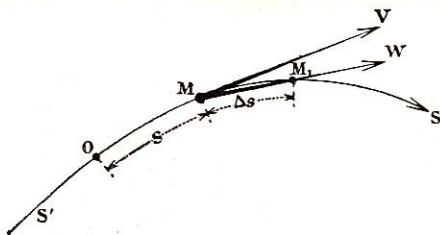


Fig. 18. — Movimiento curvilíneo. — Trayectoria y velocidad.

2º **Velocidad en el instante t .** — Se llama *velocidad en el instante t* , el límite hacia el cual tiende la *velocidad media*, cuando Δt tiende hacia cero.

Por definición :

$$v = \lim. \frac{\text{cuerda } MM_1}{\Delta t}.$$

Pero se puede escribir idénticamente :

$$\frac{\text{cuerda } MM_1}{\Delta t} = \frac{\text{cuerda } MM_1}{\text{arco } MM_1} \times \frac{\text{arco } MM_1}{\Delta t}.$$

Ahora bien, pasando a los límites, la primera relación :

$$\lim. \frac{\text{cuerda } MM_1}{\text{arco } MM_1} = 1;$$

así pues :

$$v = \lim. \frac{\text{arco } MM_1}{\Delta t} = \lim \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}.$$

Vector velocidad. — La velocidad v en el instante t se representa por un vector MV (fig. 18) definido por :

- 1º Su origen o punto de aplicación M ;
- 2º Su dirección, según la tangente en M a la trayectoria;
- 3º Su sentido, el del movimiento;
- 4º Su magnitud, cuyo valor es la derivada del arco de trayectoria respecto del tiempo. Este valor va precedido del signo $+$ o $-$, según se mueve el móvil en el sentido positivo o negativo de la trayectoria orientada.

26. Aceleración. Hodógrafa. — Se estudian geométricamente las variaciones de

la velocidad, en magnitud y en dirección, con la hodógrafa y el vector aceleración.

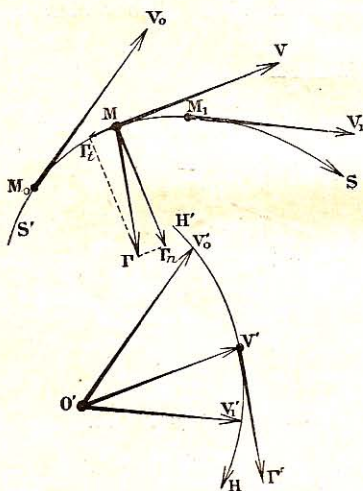


Fig. 19.

Hodógrafa del movimiento curvilíneo.

Hodógrafa. — Tomando un punto arbitrario O' , y trazando vectores $O'V'_0, O'V'_1, \dots$ equipolentes a los vectores M_0V_0, MV_1, \dots (fig. 19), los extremos V'_0, \dots se encuentran sobre una curva continua $H'H$ llamada *hodógrafa del movimiento del punto M* .

Las variaciones de la velocidad del móvil M se representan por el movimiento de un punto V' que recorre la trayectoria curvilínea $H'H$. Ahora bien, la velocidad de este móvil auxiliar, en el instante t , se representa por

medio del vector $V'\Gamma'$ tangente a la hodógrafa y en el sentido del movimiento de V' ; su valor algebraico es :

$$\gamma = \lim. \frac{\text{arco } V'V'_1}{\Delta t} \quad (\text{cuando } \Delta t \text{ tiende hacia cero}).$$

Por definición, la *velocidad del móvil auxiliar* V' es la *aceleración del móvil* M en dicho instante; es la velocidad con la cual varía la velocidad del móvil M .

Vector aceleración. — Esta aceleración, transportada a M , está representada por un vector $M\Gamma$, equipolente al vector $V'\Gamma'$; su magnitud se mide con la misma unidad que la velocidad y el espacio.

Casos particulares. — 1º En el movimiento rectilíneo uniforme, la velocidad permanece constante en magnitud y en dirección: la hodógrafa se reduce a un punto; la aceleración del móvil es nula.

2º En el movimiento rectilíneo uniformemente variado, la hodógrafa es una recta, la aceleración es constante y está dirigida según la trayectoria.

27. Movimiento circular uniforme. Velocidades.

1º **Definición.** — Un punto que se mueve siempre en el mismo sentido, está animado de un **movimiento circular uniforme** cuando su trayectoria es una circunferencia, y cuando los arcos recorridos son proporcionales a los tiempos del recorrido.

Un caballo que da vueltas en un picadero con trote regular siguiendo la misma pista, figura el movimiento circular uniforme.

2º **Velocidad lineal.** — La *velocidad lineal* es la relación constante entre el camino recorrido y el tiempo.

Sea un móvil M que describe una circunferencia fija C , de radio R . El sentido positivo es el de la flecha; O es el origen de los espacios. En los tiempos 0 y t el móvil ocupa las posiciones M_0 y M (fig. 20).

La *velocidad es constante en magnitud*, pues por definición:

$$\frac{s - s_0}{t} = C^{te} = v.$$

De donde la ecuación del movimiento:

$$s = s_0 + vt.$$

El *vector velocidad* MV es tangente a la circunferencia, en el sentido del movimiento.

Esta velocidad se llama *velocidad lineal*, para distinguirla de la *velocidad angular*.

3º **Velocidad angular.** — La *velocidad angular* es la *velocidad del móvil sobre una circunferencia de radio igual a la unidad y concéntrica a la trayectoria*.

Imaginemos que un móvil m recorra una circunferencia concén-

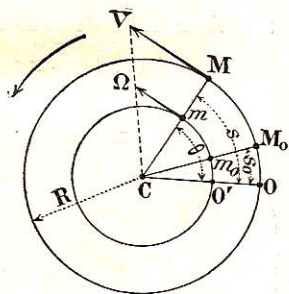


Fig. 20. — Movimiento circular. Velocidades.

trica a la trayectoria y de radio 1, siguiendo el movimiento del móvil M.

La velocidad de m se llama *velocidad angular*. Su valor es *constante* :

$$\omega = \frac{\theta - \theta_0}{t}.$$

Ahora bien los arcos de las dos trayectorias son semejantes, y se tiene : $\frac{s}{\theta} = \frac{s_0}{\theta_0} = \frac{R}{1}$; de donde $s = R\theta$ y $s_0 = R\theta_0$.

Por consiguiente : $v = \omega R$.

El vector de la velocidad angular es $m\Omega$.

Así pues, *la velocidad lineal es igual al producto de la velocidad angular por el radio de la trayectoria*.

Observaciones. — 1º Sea T la *duración de una revolución* del móvil, o el tiempo que tarda en recorrer la circunferencia $2\pi R$.

Los valores de las velocidades son :

para la velocidad lineal : $v = \frac{2\pi R}{T}$,

y para la velocidad angular : $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

2º Sea N el *número de vueltas por minuto* del móvil sobre su trayectoria. Se tiene : $T = \frac{60}{N}$;

de donde $\omega = \frac{2\pi N}{60} = \frac{\pi N}{30}$, y $v = \frac{\pi R N}{30}$.

28. Aceleración centrípeta. Hodógrafa. — La velocidad, constante en magnitud, varía en dirección. Resulta de ello una aceleración.

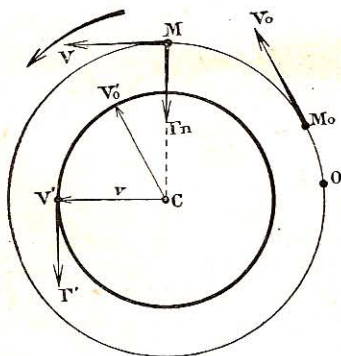


Fig. 21. — Hodógrafa del movimiento circular uniforme.

1º **Hodógrafa del movimiento.** — Eligiendo el centro C como punto fijo, los vectores CV'_0 , CV' ... equipolentes a los vectores M_0V_0 , MV ... tienen sus extremos en una circunferencia de radio v (fig. 21).

Imaginemos que un móvil auxiliar V' recorra la circunferencia hodógrafa de radio v . Su movimiento es uniforme, pues realiza una vuelta entera en el mismo sentido y en el mismo tiempo que el móvil M ; su velocidad constante se representa por medio del vector $V'\Gamma'$.

Por definición, la velocidad del móvil auxiliar V' es la aceleración del móvil M en dicho instante. Su vector es $M\Gamma_n$, equipolente a $V\Gamma'$.

La aceleración es normal a la trayectoria y está dirigida hacia el centro.

2º Magnitud de la aceleración. — Sea γ_n el valor de la aceleración. Expresemos que los móviles V' y M recorren sus trayectorias respectivas en el mismo tiempo y con movimiento uniforme :

$$\frac{\gamma_n}{\text{radio de la hodógrafa}} = \frac{v}{\text{radio de la trayectoria}}$$

es decir :

$$\frac{\gamma_n}{v} = \frac{v}{R};$$

de donde

$$\gamma_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R.$$

Observación. — En función de T , se tiene :

$$\gamma_n = \frac{4\pi^2 R}{T^2}, \text{ pues } v = \frac{2\pi R}{T}.$$

29. Problemas sobre el movimiento. — 1º *Un rápido sale de Reims a las 2 y 20^m, y llega a París a las 4 y 24^m; la distancia es 156 kilómetros. — ¿Cuál es la velocidad del tren? Supónese el movimiento uniforme.*

La duración del trayecto es 2^h4^m, es decir 7440 segundos.

La velocidad horaria es :

$$\frac{156 \text{ km}}{2 \frac{1}{15}} = 156 \text{ km} \times \frac{15}{31} = 75 \text{ km}, 483.$$

La velocidad por segundo es :

$$\frac{156000 \text{ m}}{7440} = 20 \text{ m}, 967.$$

2º *La llanta de un volante, de un diámetro medio de 4 metros da 120 vueltas por minuto. — Determinense : las velocidades angular y lineal, así como la aceleración de la llanta.*

La velocidad angular

$$\omega = \frac{\pi N}{30} = \frac{\pi \times 120}{30} = 4\pi.$$

La velocidad lineal

$$v = \omega R = 4\pi \times 2 \text{ m} = 25 \text{ m}, 133.$$

La aceleración centrípeta

$$\gamma_n = \omega^2 R = 16\pi^2 \times 2 \text{ m} = 315 \text{ m}, 827.$$

CAPÍTULO II

CINEMÁTICA DEL CUERPO SÓLIDO

SUMARIO :

§ 1. *Movimiento de traslación* : Naturaleza y propiedades del movimiento.

§ 2. *Movimiento de rotación* : Velocidad y vector de rotación de un sólido alrededor de un eje fijo.

§ 3. *Movimiento helicoidal* : Hélice; velocidad de deslizamiento y de rotación.

§ 1. — MOVIMIENTO DE TRASLACIÓN

30. Traslación de un cuerpo sólido. — 1º Definición.
— *Un cuerpo sólido está animado de un movimiento de traslación, cuando todos sus puntos materiales tienen traslaciones iguales y paralelas.*

Según la naturaleza de las trayectorias de los puntos, la traslación del sólido puede ser :

Rectilínea : cajón de mueble que se desliza por sus ranuras; émbolo de un motor en marcha;

Curvilínea : platillos de una balanza de Roberval (fig. 135), biela de acoplamiento de una locomotora (fig. 74).

2º Trayectorias. — *Todos los puntos del sólido describen trayectorias iguales y que pueden superponerse.*

El cuerpo sólido (S) animado de un movimiento de traslación ocupa sucesivamente las posiciones $(S_1), (S_2), \dots (S')$ (fig. 22). Dos puntos A y B de dicho cuerpo describen durante dicho movimiento trayectorias $AA_1A_2 \dots A'$ y $BB_1B_2 \dots B'$.

Conservando el vector AB una magnitud y una dirección fijas, los vectores AB, $A_1B_1 \dots A'B'$ son equipolentes. Para hacer coincidir las dos trayectorias, basta pues hacer deslizar la primera a lo largo de los segmentos iguales y paralelos AB, $A_1B_1, \dots A'B'$.

Observación. — La traslación de un cuerpo queda determinada en cuanto se conoce el movimiento de un solo punto del cuerpo.

31. Velocidades y aceleraciones. — 1º **Velocidades.** -- Todos los puntos del cuerpo sólido tienen, en el mismo instante, velocidades equipolentes.

En efecto, si A y B son las posiciones de dos puntos del cuerpo en el instante t (fig. 22), sus posiciones en el instante $(t + \Delta t)$ serán A_1

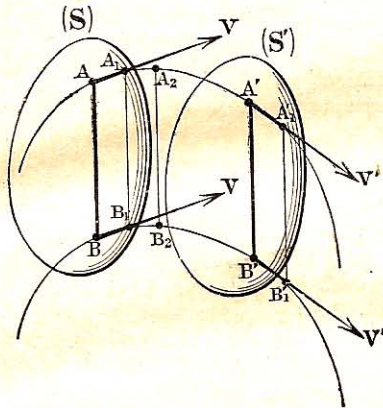


Fig. 22. — Trayectoria y velocidades del movimiento de traslación.

y B_1 , tales que la figura ABB_1A_1 sea un paralelogramo.

Las velocidades medias de dichos puntos : $\frac{AA_1}{\Delta t}$ y $\frac{BB_1}{\Delta t}$ son iguales y paralelas ; sus vectores son pues equipolentes.

Esta equipolencia subsiste cuando, tendiendo Δt hacia cero, estos vectores se convierten en los vectores AV y BV de las velocidades en los puntos A y B.

2º Aceleraciones. — Todos los puntos tienen, en el mismo instante, aceleraciones equipolentes.

Siendo iguales las velocidades, la *hodógrafa* del movimiento es, para todos los puntos del sólido, exactamente la misma curva, descrita de modo idéntico.

Esta velocidad y esta aceleración, comunes a todos los puntos del sólido, se llaman *velocidad y aceleración de traslación* en el instante t .

§ 2. — MOVIMIENTO DE ROTACIÓN

32. Rotación de un sólido alrededor de un eje. —
1º Definición. — *Un cuerpo está animado de un movimiento de rotación alrededor de un eje fijo, cuando todos sus puntos materiales describen circunferencias cuyos planos son perpendiculares al eje de rotación y cuyos centros están sobre dicho eje.*

Ejemplos: la Tierra en su movimiento diurno; las ruedas de engranaje, las agujas de un reloj, los tornos (fig. 23).

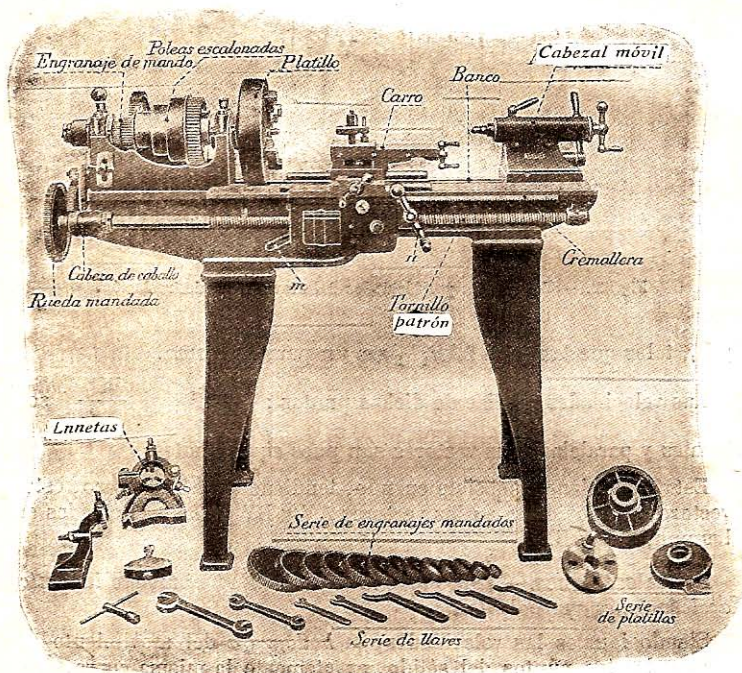


Fig. 23. — Torno paralelo.

2º Velocidades. — Sea un sólido (S) animado de un movimiento de rotación alrededor del eje XX' (fig. 24). Los puntos del cuerpo tienen la misma velocidad angular, puesto que sus radios vectores describen, durante el mismo tiempo, ángulos en el centro iguales.

Se tiene pues : $\omega = \frac{v}{R} = \frac{v'}{R'} = \dots$

En cada instante *las velocidades son proporcionales a los radios.*

Observación. — Cuando es constante ω , el movimiento de rotación es uniforme.

Entonces $\omega = \frac{2\pi N}{60}$, y $v = \frac{2\pi RN}{60}$;

v es la velocidad de un punto situado a la distancia R del eje, N el número de vueltas por minuto.

3º Vector de la rotación. — El movimiento de rotación de un cuerpo está completamente determinado por el eje $X'X$ y la velocidad angular.

El vector $O\omega$ llevado sobre el eje define el movimiento (fig. 24) :

Su *origen* es un punto cualquiera O del eje ;

Su *sentido* es tal que un observador, con los pies en O y la cabeza en ω , ve los puntos del sólido trasladarse de su izquierda hacia su derecha (sentido de las agujas de un reloj) ;

Su *magnitud* iguala el valor numérico de la velocidad angular en el instante t .

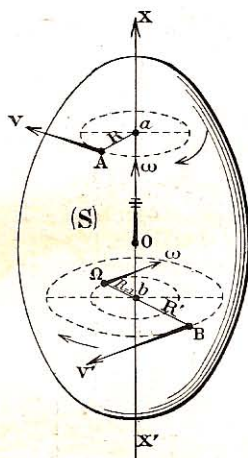


Fig. 24.

Trayectorias y velocidades del movimiento de rotación.

§ 3. — MOVIMIENTO HELIZOIDAL

33. Movimiento helicoidal de un sólido. — 1º Definición

— Sea un sólido sujeto a girar alrededor de un eje fijo y, al mismo tiempo, a deslizarse a lo largo de dicho eje.

Se dice que *este cuerpo está animado de un movimiento helicoidal, si la relación entre la longitud en que se ha deslizado a lo largo del eje y el ángulo del cual ha girado alrededor del eje es constante.*

El movimiento del tornillo de una prensa de copiar es helicoidal (fig. 25).

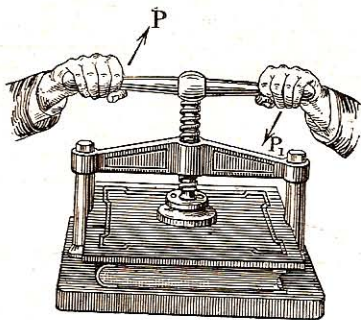


Fig. 25. — Prensa de copiar.

2º Trayectoria. — La trayectoria de cada punto del cuerpo es una hélice¹.

En efecto, en esta traslación un punto A se encuentra constantemente a la misma distancia R del eje; queda pues sobre la superficie lateral de un cilindro de radio R.

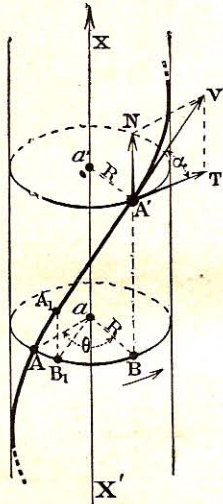


Fig. 26.
Trayectoria y velocidades del movimiento helicoidal.

La curva AA' es pues una hélice.

Observaciones. — 1º Cuando $\theta = 2\pi$, se obtiene :

$$\frac{A'B}{\text{arco AB}} = \frac{h}{2\pi R} \quad (2)$$

La cantidad h se llama paso de la hélice : es la longitud de que se ha deslizado el cuerpo durante una revolución completa.

Aislemos este cilindro (fig. 26). Tracemos las secciones rectas en los puntos A y A' (posiciones inicial y final del movimiento), los radios aA y a'A', y la ordenada BA'.

La longitud de que se ha deslizado el cuerpo a lo largo del eje es :

$$aa' = BA'$$

y el ángulo de que gira, durante el mismo tiempo, es :

$$\widehat{AaB} = \theta.$$

θ se mide por el arco correspondiente, de radio 1.

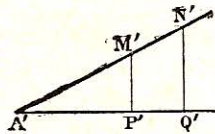
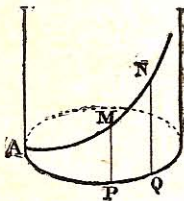
Según la definición :

$$\frac{aa'}{\theta} = C^{te}.$$

Multiplicando por la constante $\frac{1}{R}$:

$$\frac{aa'}{R\theta} = \frac{A'B}{\text{arco AB}} = k. \quad (1)$$

¹ La hélice es una curva formada, sobre un cilindro recto de base circular, por uno de los lados de un ángulo que se arrolla sobre dicho cilindro, mientras que el otro lado se aplica sobre la circunferencia de base.



Por ejemplo, el ángulo $P'A'M' = \alpha$ sobre el cilindro APM : el lado A'P' se arrolla sobre la base, el lado A'M' forma un arco de hélice. Se tiene :

$$\text{tg } \alpha = \frac{M'P'}{A'P'} = \frac{MP}{\text{arco AP}} = k;$$

k es la pendiente de la hélice.

2º Todos los puntos del cuerpo son solidarios del punto A; así pues *todos los puntos del cuerpo móvil describen hélices de igual paso* (solo el radio varía).

34. Sentido del arrollamiento. Velocidades. — 1º **Sentido.** — Supongamos un observador colocado según el *eje helizoidal* X'X (fig. 26) y un móvil que va desde los pies hacia la cabeza, del observador, girando al propio tiempo alrededor del eje.

Si, en esta rotación, el observador ve el móvil dirigirse desde *su derecha hacia su izquierda*, el movimiento helizoidal resultante es *dextrorsum*; es el sentido acostumbrado de los tornillos y tuercas. Este movimiento de *su derecha hacia su izquierda*, es independiente del sentido en que se coloca el observador a lo largo del eje.

Un movimiento en sentido contrario, de *su izquierda hacia su derecha*, se llama *sinistrorsum*.

2º **Velocidad de un punto.** — Supongamos que la rotación alrededor del eje sea *uniforme*: $\omega = Cte$.

La velocidad v de un punto A' del cuerpo, situado a una distancia R del eje, se dirige según la tangente A'V a la hélice y en el sentido del movimiento. Puede considerarse como la suma geométrica de sus proyecciones A'N sobre la generatriz del punto A' del cilindro, y A'T sobre la tangente a la sección recta.

Ahora bien, la proyección sobre la tangente es :

$$v_t = v \cos \alpha = \omega R;$$

y la proyección sobre la generatriz es :

$$v_g = v \operatorname{sen} \alpha = v_t \operatorname{tg} \alpha,$$

que, en virtud de la fórmula (2), se convierte en :

$$v_g = \frac{h}{2\pi} \omega.$$

La velocidad v_t se llama *velocidad de circulación* del punto A' alrededor del eje X'X, y la velocidad v_g , *velocidad de deslizamiento* del punto a lo largo de dicho eje.

Así pues, la velocidad del punto A' es :

$$v = \sqrt{v_t^2 + v_g^2} = \frac{\omega}{2\pi} \sqrt{4\pi^2 R^2 + h^2}.$$

CAPÍTULO III

COMPOSICIÓN DE LOS MOVIMIENTOS

SUMARIO :

§ 1. *Movimientos rectilíneos* : Composición de velocidades o de aceleraciones constantes.

§ 2. *Movimientos curvilíneos* : Composición de velocidades.

§ 1. — MOVIMIENTOS RECTILÍNEOS

35. Movimientos relativos. — Los desplazamientos reales de los cuerpos, son de ordinario la combinación de varios movimientos simultáneos.

Ejemplo : Las ruedas de un coche en marcha tienen dos movimientos respecto de la Tierra : uno de rotación sobre sus ejes, otro de traslación con dichos ejes.

Un observador inmóvil percibe completamente el desplazamiento de las ruedas en el espacio; con relación a él, el *movimiento resultante* de las ruedas es *absoluto*. Por oposición, las ruedas no tienen sino un *movimiento relativo* respecto del coche, porque éste posee un *movimiento propio*.

Cambio del sistema de comparación. — Siendo conocidos el movimiento de un sistema A con relación a otro sistema B, así como el movimiento de un móvil M en el sistema A, encuéntrese el movimiento de M en el sistema B (11).

El movimiento del sistema A con relación al sistema B¹ se llama movimiento de *arrastre*; el de M en A, movimiento *relativo*; el de M en B, movimiento *absoluto*. Las trayectorias, velocidades y aceleraciones correspondientes, se distinguen con los mismos calificativos.

Estudiemos tres casos, según sean los movimientos de arrastre y relativos: 1º rectilíneos y uniformes; 2º rectilíneos y uniformemente variados; 3º curvilíneos y variados.

¹ El movimiento puede ser una traslación, una rotación; helicoidal, etc.

36. Composición de movimientos uniformes. — Teorema. — *Dos movimientos rectilíneos y uniformes se componen en un movimiento rectilíneo y uniforme.*

La velocidad del movimiento resultante es la suma geométrica de las velocidades de los movimientos componentes.

Sea M la posición de un punto material en el instante inicial (fig. 27).

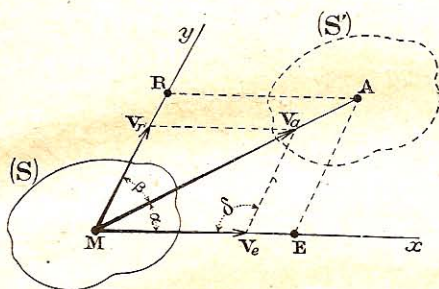


Fig. 27. — Composición de movimientos rectilíneos uniformes.

Sometido únicamente al movimiento de arrastre uniforme, según Mx , llegaría a V_e en la unidad de tiempo, y a E en el tiempo t ; sometido al movimiento relativo uniforme, según My , llegaría a V_r y a R.

Si se supone que el punto posee simultáneamente los dos movimientos llega a V_a en la unidad de tiempo y a A en el tiempo t , recorriendo la diagonal MA del paralelogramo construido sobre ME y MR.

En efecto, siendo los movimientos uniformes, sus velocidades V_e y V_r están representadas por los vectores MV_e y MV_r , y los espacios tienen por valores :

$$ME = v_e t,$$

$$MR = v_r t.$$

y

De donde, eliminando t :

$$\frac{ME}{v_e \text{ o } MV_e} = \frac{MR}{v_r \text{ o } MV_r}.$$

Los triángulos MAE y $MV_a V_e$ son pues semejantes, y los tres puntos M, V_a , A, están en línea recta. Por consiguiente :

- 1º El punto M ha seguido una trayectoria rectilínea ; la diagonal MA ;
- 2º El movimiento es uniforme, porque los triángulos semejantes dan : $MA = v_a t$;

3º La velocidad v_a de este movimiento resultante, representada por el vector MV_a , es la suma geométrica de las velocidades v_e y v_r de los movimientos componentes :

$$(v_a) = (v_e) + (v_r).$$

37. Composición de movimientos uniformemente variados. — Teorema. — *Dos movimientos rectilíneos uniformemente variados, y sin velocidad inicial, se componen en un movimiento rectilíneo uniformemente variado.*

La aceleración del movimiento resultante es la suma geométrica de las aceleraciones de los movimientos componentes.

Sea M la posición de un punto material en el tiempo origen (fig. 28). Sometido únicamente al movimiento de arrastre uniformemente

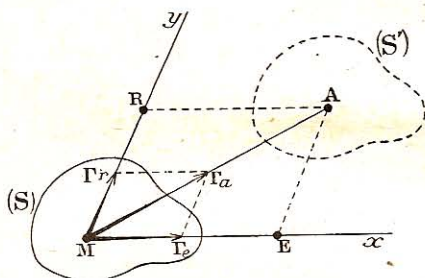


Fig. 28. — Composición de movimientos rectilíneos uniformemente variados.

variado (sin velocidad inicial), cuya aceleración constante γ_e está representada por el vector $M\Gamma_e$, llegaría a E en el tiempo t ; sometido al movimiento relativo de aceleración γ_r , llegaría a R en el tiempo t .

Si se supone que el punto material posee simultáneamente los dos movimientos, llega a A en el tiempo t , siguiendo la trayectoria rectilínea MA,

diagonal del paralelogramo construido sobre ME y MR. La aceleración de este movimiento uniformemente variado es γ_a , representada por el vector $M\Gamma_a$, suma geométrica de los vectores $M\Gamma_e$ y $M\Gamma_r$.

En efecto,
$$ME = \frac{1}{2} \gamma_e t^2,$$

y
$$MR = \frac{1}{2} \gamma_r t^2.$$

De donde, eliminando t^2 :

$$\frac{ME}{\gamma_e \text{ o } M\Gamma_e} = \frac{MR}{\gamma_r \text{ o } M\Gamma_r}.$$

Los triángulos MAE y $M\Gamma_a\Gamma_e$ son pues semejantes. Razonemos como anteriormente:

Los tres puntos M, Γ_a , A, están en línea recta, por consiguiente:

1º El punto M ha seguido una *trayectoria rectilínea*: la diagonal MA;

2º El movimiento es *uniformemente variado*, puesto que su aceleración es constante, y que puede escribirse: $MA = \frac{1}{2} \gamma_a t^2$.

3º La *aceleración resultante* γ_a está representada por un vector $M\Gamma_a$, que es la *suma geométrica* de los vectores $M\Gamma_e$, y $M\Gamma_r$ de las aceleraciones componentes: $(\gamma_a) = (\gamma_e) + (\gamma_r)$.

§ 2. — MOVIMIENTOS CURVILÍNEOS

38. Composición de las velocidades. — Teorema. — A cada instante, la velocidad absoluta de un punto material es la suma geométrica de su velocidad de arrastre y de su velocidad relativa.

Sea M un punto material, sometido simultáneamente a dos movimientos curvilíneos de arrastre y relativo (fig. 29).

Sobre su trayectoria relativa (R), vendría a M_r en el tiempo elemental Δt.

Pero, a causa del movimiento de arrastre, la trayectoria (R) viene a (R'), y el móvil ocupa definitivamente la posición M'.

En realidad el móvil ha seguido la trayectoria absoluta (A).

Ahora bien, en este movimiento elemental, durante el tiempo Δt, se

puede suponer que la figura [MM_eM'] es un triángulo; así pues el vector MM' es la suma geométrica de los vectores MM_e y M_eM' = MM_r,

es decir :

$$\left(\frac{MM'}{\Delta t}\right) = \left(\frac{MM_e}{\Delta t}\right) + \left(\frac{MM_r}{\Delta t}\right).$$

Esta suma subsiste por pequeño que sea Δt; en el limite, cuando Δt tiende hacia cero :

$$(v_a) = (v_e) + (v_r).$$

La velocidad absoluta en el punto M, en el instante t, es pues la suma geométrica de las dos velocidades de arrastre y relativa.

39. Velocidades sobre la cicloide. — Apliquemos el teorema al caso siguiente :

El arrastre es una traslación rectilínea, y el movimiento relativo una rotación.

Es el movimiento de todos los puntos de las ruedas de un coche por una carretera plana.

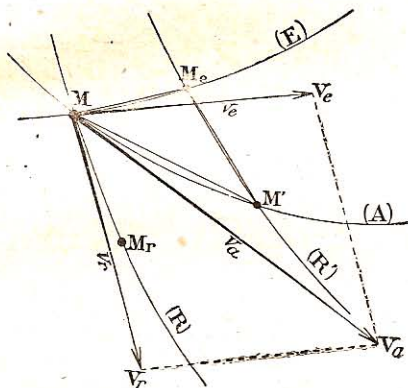


Fig. 29. — Composición de las velocidades de movimientos curvilíneos.

Estudiamos el caso para los movimientos componentes uniformes. La rueda está representada por la circunferencia O que gira sin deslizarse, sobre la recta $X'X$ (fig. 30).

La rotación alrededor de eje O , con una velocidad angular uniforme ω (en el sentido de la flecha), es el movimiento relativo de la rueda res-

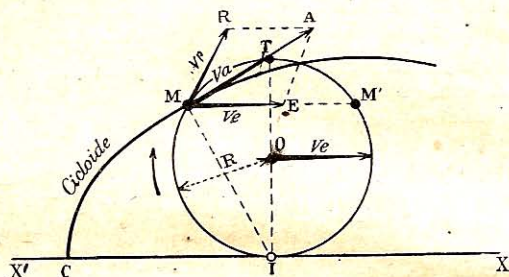


Fig. 30. — Movimiento de un móvil sobre la cicloide.

pecto del coche. Al mismo tiempo, arrastrada por el eje O , sigue el movimiento rectilíneo de arrastre, con la velocidad uniforme v_e del coche.

Un punto M de la rueda describe una cicloide (49). Su velocidad absoluta v_a es un vector MA , tangente a la curva y dirigido en el sentido del movimiento.

Su velocidad de arrastre v_e está representada por el vector ME , constante y paralelo a $X'X$; su velocidad relativa v_r , por el vector MR , constante, tangente a la circunferencia en el sentido del movimiento y de magnitud $v_r = \omega R$.

Pero : $v_e = v_r$, puesto que $IC = \text{arco } IM$.

Luego la resultante MA es la bisectriz del ángulo RME ; pasa por el punto T , extremo del diámetro vertical IT , puesto que el arco MT , medida del ángulo AMR , es igual al arco TM' , medida del ángulo AME .

La expresión algebraica de la velocidad absoluta es :

$$(v_a) = (v_e) + (v_r) = (\omega R) + (\omega R).$$

CAPÍTULO IV

CINEMÁTICA APLICADA

SUMARIO

§ 1. *Engranajes* : Clasificación de los mecanismos, de los engranajes. — Trazado de los engranajes cilíndricos; perfil cicloidal, perfil de evolvente de círculo. — Cremallera. — Engranajes cónicos y helicoidales.

§ 2. *Levas* : Levas de rodillos; leva de corazón, leva de Morín. — Levas o excéntricas de marco; excéntrica circular, excéntrica triangular.

§ 3. *Poleas de transmisión* : Transmisión por correas con rodillos guías o sin ellos. — Conos de poleas. Poleas locas.

§ 4. *Mecanismos articulados* : Biela de acoplamiento. — Biela y manivela. — Excéntrico. Corredera de Stephenson. — Paralelogramo de Watt. Rombo de Peaucellier. Inversor de Hart.

§ 1. — ENGRANAJES

I. — Generalidades.

40. Clasificación de los mecanismos. — La Cinemática aplicada es el estudio de los mecanismos destinados a transmitir y a transformar el movimiento.

1º **Motores, mecanismos, herramientas.** — El movimiento es producido por motores, transmitido por mecanismos, y recibido por herramientas.

Los *motores* o *máquinas motrices*, son los generadores de la potencia motriz destinada a mover las máquinas herramientas de una fábrica: máquinas de vapor, motores de gas, ruedas hidráulicas, turbinas de agua o de vapor. Su estudio pertenece a la Dinámica aplicada.

Los *mecanismos* o *transmisiones* comunican la potencia y el movimiento de los motores a las máquinas herramientas: árboles, poleas, engranajes, correas.

Las *máquinas herramientas* sirven para labrar los materiales: hierro, acero, madera.

Por ejemplo, la taladradora (fig. 31) es una máquina herramienta que recibe por una correa, el movimiento de la transmisión principal de la fábrica, y lo comunica, mediante poleas y engranajes, al porta-herramienta y al taladro que perfora la pieza fija en el platillo.

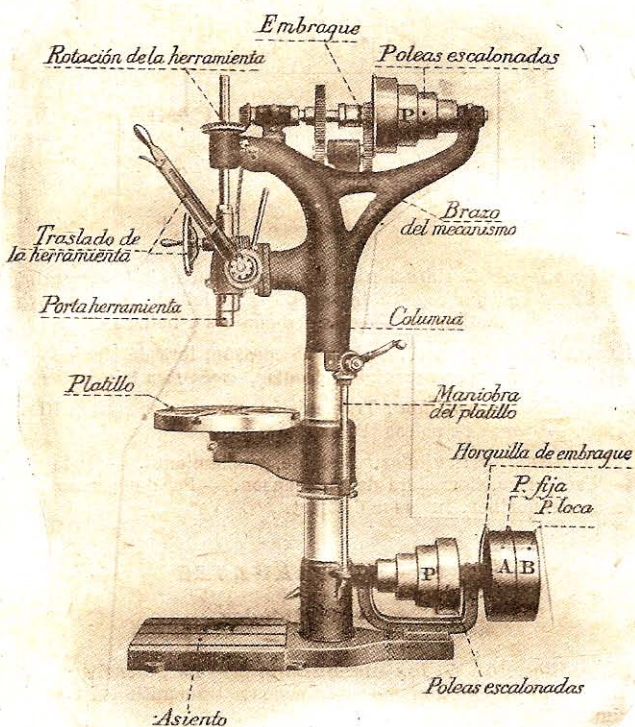


Fig. 31. — Taladradora

2º Clasificación de Willis. — Esta clasificación de los mecanismos se funda en el modo de transmitirse el movimiento :

1ª clase : Transmisión por *contacto directo* : ruedas de fricción, engranajes, excéntricas levas ;

2ª clase : Transmisión por *enlace flexible* : poleas para correa, cable, cadena articulada ;

3ª clase : Transmisión por *enlace rígido* : biela-manivela, cigüeñal, paralelogramos articulados.

41. Ruedas de fricción. Engranajes. — Las *ruedas de fricción* y los *engranajes* son *mecanismos por contacto directo*, que transmiten la rotación de un árbol a otro árbol bastante próximo.

1º Ruedas de fricción. — Las *ruedas de fricción* se emplean cuando es débil la potencia que ha de transmitirse y muy grande la velocidad de la herramienta.

Según sean los árboles paralelos o concurrentes, se emplean *cilindros de fricción* o *conos de fricción* (fig. -37) que son superficies cilíndricas o

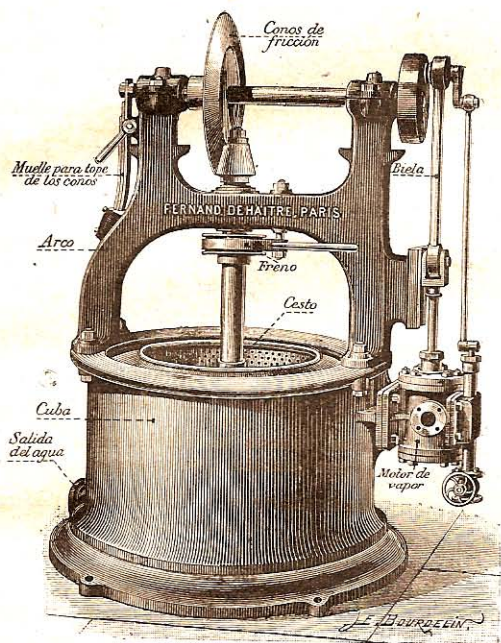


Fig. 32. — Secadora.

cónicas, apoyadas fuertemente una contra otra. Auméntase la adherencia de las *ruedas de fricción* cubriéndolas de cuero o de caucho, o construyendo los *conos* con madera, cuero o papel. Este sistema de transmisión tiene la ventaja de dar un movimiento suave y silencioso. En las *secadoras* centrifugas, el árbol de la *cesta de secar* alcanza 1500 a 2000 vueltas por minuto: un muelle regulable permite un *embrague progresivo* (fig. 32).

2º Engranajes. — Cuando la resistencia es más considerable, las *ruedas de fricción* resbalarían por falta de adherencia suficiente. Se provee entonces su superficie de dientes, y se aproximan de modo que las partes salientes de la una penetren en las entrantes de la otra a medida que se verifica la rotación. Se obtienen así *ruedas de engranaje*. La *rueda* menor toma el nombre de *piñón*, la otra conserva el nombre de *rueda*.

42. Clasificación de los engranajes. — Los engranajes se clasifican según la disposición de sus árboles. Se llaman :

1º *Engranajes cilíndricos*, cuando los árboles son paralelos (fig. 33), y están los dientes labrados en superficie cilíndricas.

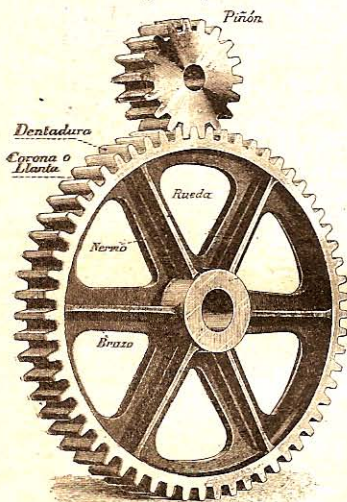


Fig. 33. — Engranaje cilíndrico.

2º *Engranajes cónicos*, cuando los árboles son concurrentes (fig. 34); los dientes están entonces labrados en dos superficies cónicas.

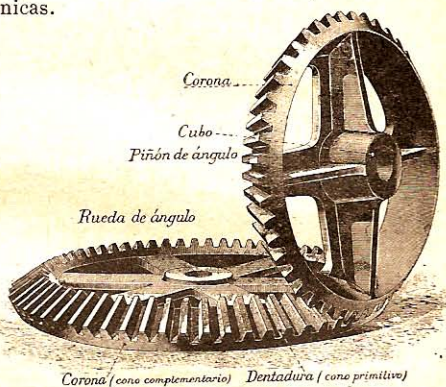


Fig. 34. — Engranaje cónico.

3º *Engranajes helicoidales*, cuando los árboles se cruzan sin ser concurrentes (fig. 35); se emplean también a veces *engranajes hiperboloides*.

43. Definiciones de la dentadura. — En las ruedas de engranajes se llaman (fig. 36) :

Tornillo sin fin

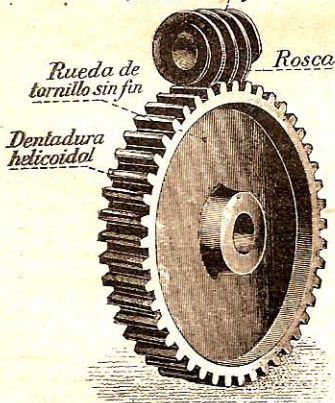
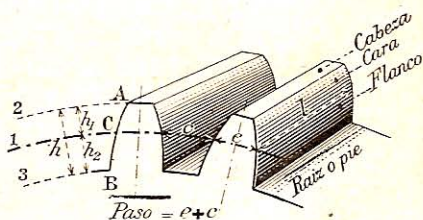


Fig. 35. — Engranaje por tornillo sin fin.

1º *Circunferencias primitivas* : secciones de los cilindros de fricción correspondientes a la rueda y al piñón por un plano perpendicular a los ejes de rotación ;



- 1 — *C. primitiva*
- 2 — *C. de cabeza*
- 3 — *C. de pie*

Fig. 36. — Dentadura de los engranajes.

2º *Circunferencias de cabeza* : secciones por el mismo plano, de los cilindros exteriores de la cabeza de los dientes;

3º *Circunferencias de pie* : las de los cilindros interiores del pie de los dientes;

4º *Espesor y hueco de un diente* : ancho e e intervalo c , medidos en arcos sobre la circunferencia primitiva, $c = \frac{21}{20} e$ (próximamente)²;

5º *Paso del engranaje* : suma $p = e + c$; este paso es idéntico no sólo para todos los dientes de una rueda, sino también para todas las ruedas que engranan con la primera;

6º *Cara y flanco de un diente* : partes AC y CB de la dentadura, situadas encima y debajo del cilindro primitivo;

7º *Altura de un diente* : $h = h_1 + h_2$, medida según el radio; $h_1 = 0,60e$ y $h_2 = 0,75e$ (próximamente);

8º *Longitud de un diente* : medida l de la generatriz, $l = 5e$ (próximamente).

44. Paso circunferencial. Paso diametral. — 1º *Paso circunferencial*. — Es el arco p medido sobre la circunferencia primitiva. Es igual al cociente de esta circunferencia por el número de dientes n :

$$p = \frac{\pi D}{n}. \quad (1)$$

2º *Paso diametral o módulo*. — Es el cociente del diámetro primitivo en milímetros por el número de dientes :

$$m = \frac{D}{n}.$$

Luego $p = m\pi$ y $D = mn$.

El diámetro primitivo iguala el producto del módulo por el número de dientes.

Los constructores emplean de preferencia la notación en módulos, que simplifica los cálculos. Los *módulos normales* son los siguientes :

1,00	2,00	3,00	4,00	5,00	6,00	9	13	18	28	38
1,25	2,25	3,25	4,25	5,25	6,50	10	14	20	30	40
1,50	2,50	3,50	4,50	5,50	7,00	11	15	22	32	50
1,75	2,75	3,75	4,75	5,75	8,00	12	16	25	35	

Ejemplo : Una rueda de engranaje de 30 dientes y de módulo 8 tiene un paso $p = 8\pi = 25\text{mm},13$, y un diámetro $D = 8 \times 30 = 240\text{mm}$.

45. Velocidades de las ruedas de fricción y de engranaje. — Sean R y R' los radios de las circunferencias primitivas,

ω y ω' las velocidades angulares,

n y n' los números de dientes,

N y N' los números de vueltas.

¹ Se puede determinar el espesor en milímetros por la fórmula : $e = k\sqrt{P}$ en que P es el esfuerzo en kg. sobre el diente; $k = 0,9$ para el hierro colado; 0,6 para el acero; 1,5 para la madera.

Las velocidades circunferenciales son iguales :

$$\omega R = \omega' R'$$

$$\frac{2\pi RN}{60} = \frac{2\pi R' N'}{60} \quad (27)$$

Luego
$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{R'}{R} = \frac{N'}{N} = \frac{n'}{n} \quad (1)$$

Si no hay resbalamiento de las superficies en contacto, la fórmula se aplica lo mismo a las ruedas de fricción : R y R' son los radios de los cilindros o de los conos (fig. 37).

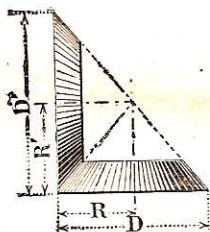


Fig. 37 — Velocidades de los conos de fricción.

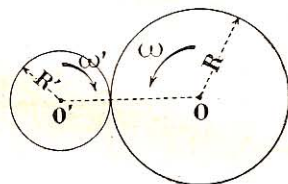


Fig. 37* — Velocidades de los engranajes y ruedas de fricción cilíndricas.

Así, las velocidades angulares son inversamente proporcionales a los radios y al número de dientes, y directamente proporcionales al número de vueltas.

46. Tren de ruedas dentadas. — Cuando se quiere obtener grandes variaciones de velocidad sin emplear ruedas de diámetro demasiado considerable, se utiliza un tren de ruedas dentadas (tornos, automóviles, relojes, etc.).

Es una serie de engranajes intermedios, colocados entre la rueda y el piñón extremos (fig. 38); están montados en ejes paralelos, de modo que cada eje lleve una rueda y un piñón solidarios.

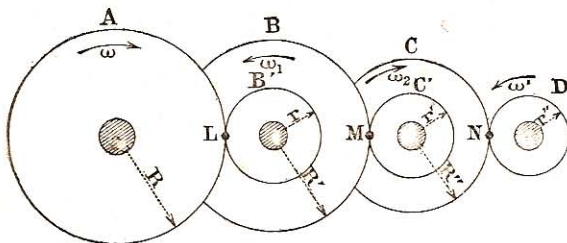


Fig. 38. — Tren de ruedas dentadas.

La relación de las velocidades angulares ω y ω' de la rueda y del piñón extremos A y D, se llama razón del tren.

Sean $\omega_1, \omega_2 \dots$ las velocidades angulares de los árboles intermedios; las velocidades circunferenciales tienen sucesivamente por valor :

$$\begin{aligned}\omega R &= \omega_1 r' & (\text{velocidad en L}), \\ \omega_1 R' &= \omega_2 r'' & (\text{velocidad en M}), \\ \omega_2 R'' &= \omega' r''' & (\text{velocidad en N}).\end{aligned}$$

Multiplicando miembro por miembro :

$$\omega RR'R'' = \omega' r'r''r'''$$

De donde

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{r'r''r'''}{RR'R''} \quad (2)$$

La razón de un tren de ruedas dentadas es igual a la relación del producto de los radios de los piñones al producto de los radios de las ruedas.

47. Problemas sobre los engranajes. — 1º Una rueda y su piñón dan respectivamente 75 y 225 vueltas por minuto. La rueda tiene 300 milímetros de diámetro y 30 dientes. — Determinar el diámetro del piñón, su número de dientes y el paso.

La fórmula (1) da :

el diámetro $D' = D \frac{N}{N'} = 300 \times \frac{75}{225} = 100$ milímetros ;

y el número de dientes $n' = n \frac{D'}{D} = 30 \times \frac{100}{300} = 10$.

El módulo $m = \frac{D}{n} = 10$,

y el paso $p = m\pi = 31^{\text{mm}}, 42$.

2º Un tren de ruedas está montado sobre tres árboles, el primero de los cuales da 20 vueltas por minuto. En el primer par de engranajes : $D = 228$ milímetros y $d = 96$ milímetros, el módulo es 8; en el segundo : $D' = 200$ milímetros, y $d' = 50$ milímetros, el módulo 5. — ¿Cuáles son los números de dientes y las velocidades ?

En el primer par el número de dientes es :

$$\frac{288}{8} = 36 \text{ dientes, y } \frac{96}{8} = 12 \text{ dientes.}$$

En el segundo : $\frac{200}{5} = 40$ — y $\frac{50}{5} = 10$ —

La velocidad del segundo árbol es : $20 \times \frac{288}{96} = 60$ vueltas ;

la del tercero : $60 \times \frac{200}{50} = 240$ vueltas.

II. — Trazado de los engranajes cilíndricos.

48. Principio del trazado de las dentaduras. — El problema de los engranajes es el siguiente :

Dado el perfil de los dientes de una rueda, determinar el perfil conjugado de los dientes de la otra rueda, para que los dos perfiles queden constantemente tangentes.

Los perfiles más corrientes son : el *cicloidal* y el de *evolvente de círculo*.

49. Curvas cicloidales. — Estas curvas planas son : la cicloide, la epicloide y la hipocicloide.

1º Cicloide. — *La cicloide es engendrada por un punto de un círculo que rueda, sin deslizarse, sobre una recta fija.*

La recta fija se llama *base*.

El trazado de la cicloide por puntos es el siguiente (fig. 39) :

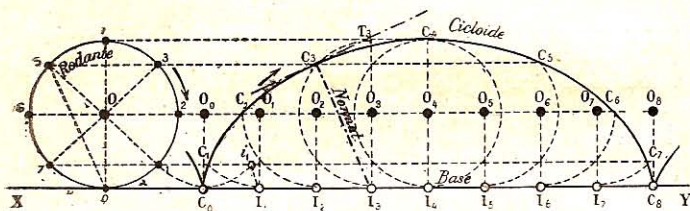


Fig. 39. — Trazado de la cicloide.

El círculo se divide en partes iguales, 8 por ejemplo. Por los puntos de división se trazan paralelas a la base XY; sobre dicha recta, se toman longitudes C_0I_1, I_1I_2, \dots iguales al arco $C_0i_1 = \text{el arco } O_1$, o sea a $1/8$ de la circunferencia generatriz; los puntos O_1, O_2, \dots son sucesivamente los centros del círculo móvil.

Los puntos C_1, C_2, \dots de la cicloide están en la intersección de las paralelas a la base y de las circunferencias O_1, O_2, \dots . En efecto, cuando la circunferencia ha pasado de O_0 a O_1 , el punto i_1 ha llegado a I_1 , y el punto C_0 a C_1 , tal que :

$$\text{arco } I_1C_1 = \text{arco } C_0i_1 = \text{arco } O_1;$$

y así sucesivamente.

2º Epicloide. Hipocicloide. — *Estas curvas están engendradas por un punto de un círculo que rueda, sin resbalar, en lo exterior (epicloide) o en lo interior (hipocicloide) de un círculo fijo.*

El círculo fijo es la base de la curva.

El trazado por puntos es análogo al de la cicloide. La generatriz se divide

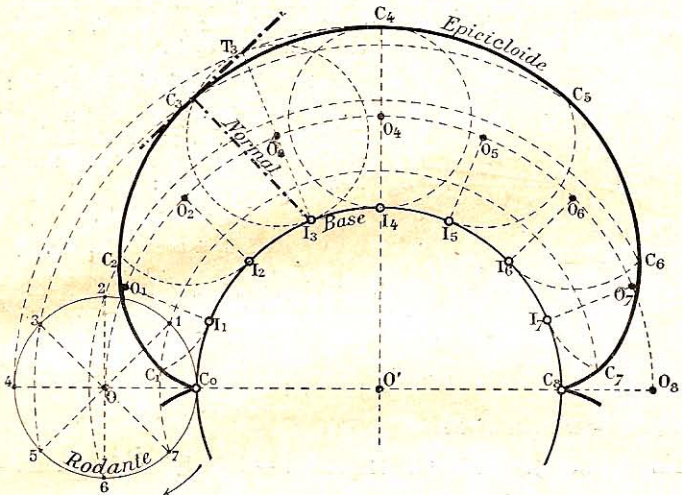


Fig. 40. — Trazado de la epicicloide.

en partes iguales, 8 por ejemplo (fig. 40 y 41).

Por los puntos de división se trazan circunferencias concéntricas a la base O' sobre la cual se llevan longitudes de arcos $C_0I_1, I_1I_2...$ iguales al arco C_0I_1 rectificado o a $1/8$ de la circunferencia generatriz.

Los puntos $C_1, C_2...$ de las curvas están en la intersección de las circunferencias concéntricas a la base O' y de las circunferencias $O_1, O_2...$

Observaciones. — 1º En las tres curvas cicloidales, la normal y la tangente en un punto cualquiera C_3 forman, con el diámetro I_3T_3 , un triángulo rectángulo $I_3C_3T_3$.

2º Cuando la generatriz tiene un radio mitad del radio de la base, la hipocicloide se reduce a una recta, diámetro del círculo de base (*Teorema de Lahire*).

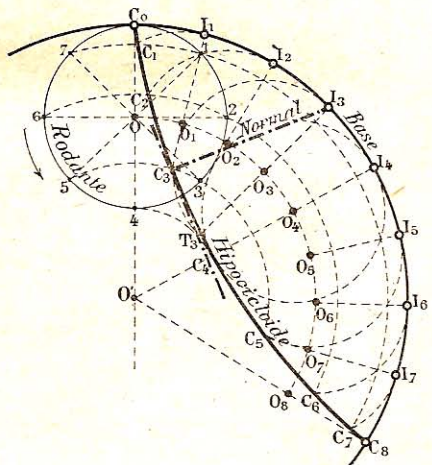


Fig. 41. — Trazado de la hipocicloide.

50. Evolvente de círculo. — *La evolvente de círculo es la curva engendrada por un punto cualquiera de una recta que rueda, sin resbalar, sobre un círculo fijo.*

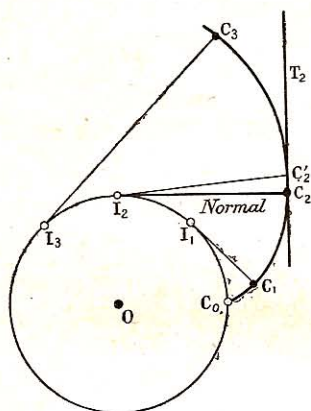


Fig. 42. — Evolvente de círculo.

El trazado es el siguiente (fig. 42):

Sobre el círculo se señalan puntos de división I_1, I_2, \dots ; sobre las tangentes al círculo trazadas por estos puntos, se llevan las longitudes:

$$I_1C_1 = \text{arco } I_1C_0,$$

$$I_2C_2 = \text{arco } I_2C_0, \text{ etc.}$$

La *evolvente de círculo* pasa por los puntos C_0, C_1, C_2, \dots . El círculo fijo se llama la *evoluta*.

Observación. — La recta móvil es a la vez tangente a la evoluta y normal a la evolvente.

51. Engranajes de perfil cicloidal. — Principio del trazado. —

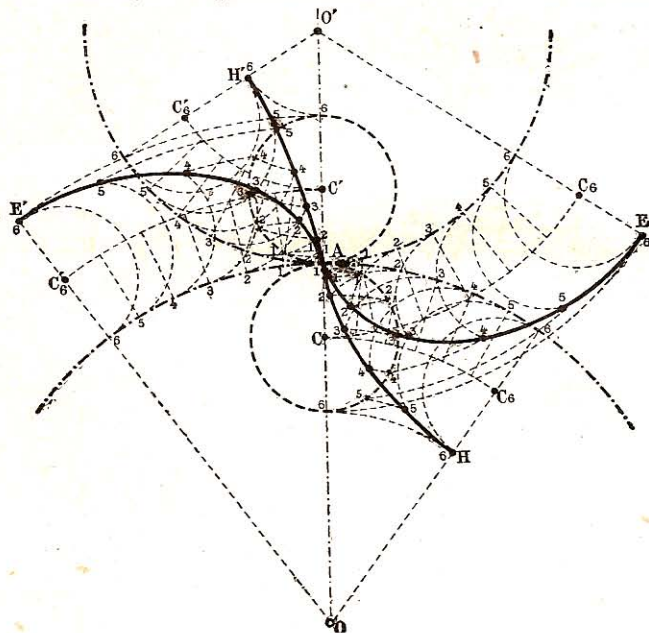


Fig. 43. — Curvas cicloidales del perfil de los dientes.

Sobre las circunferencias primitivas O y O' que sirven de bases, se hacen rodar dos círculos C y C' .

El punto A que pertenece a ambas circunferencias C y C' describe curvas ciclooidales conjugadas, que permanecen constantemente tangentes cuando funcionan los engranajes (fig. 43 y 44).

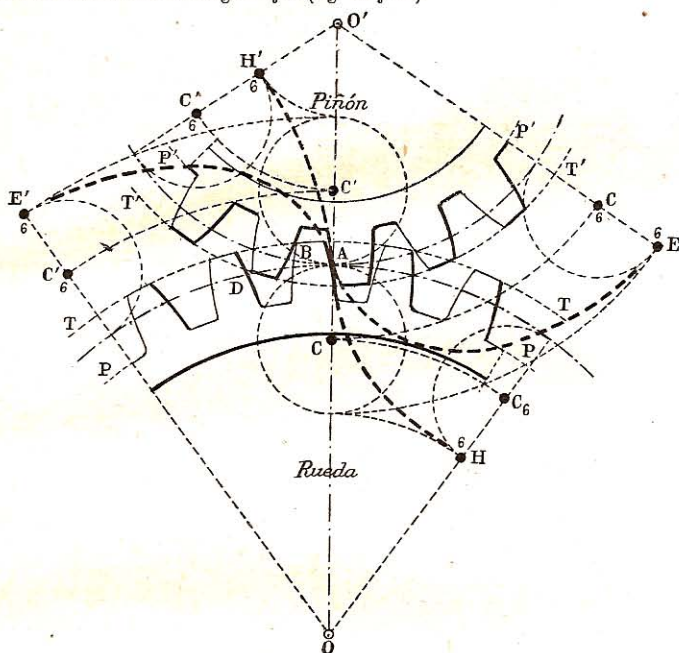


Fig. 44. — Engranaje de perfil cicloidal.

Trazado del engranaje. — Los perfiles de los dientes de la rueda se obtienen por la rotación de C en lo interior de la circunferencia primitiva O (hipocicloide AH) y de C' en lo exterior de la misma circunferencia (epicicloide AE'). Estas curvas sirven respectivamente de flanco y de cara a la dentadura.

Los perfiles de los dientes del piñón, se obtienen por la rodadura de C en lo interior de la circunferencia primitiva O' (hipocicloide AH') y de C' en lo exterior (epicicloide AE').

Para tener el trazado completo de un diente, se limitan las curvas ciclooidales en las circunferencias de cabeza y de pie de la rueda y del piñón, y luego se dibuja el perfil simétrico que pasa por el punto B , tal que : arco $AB = e$ y arco $ABD = e + c = p$.

Se repite la dentadura por toda la circunferencia primitiva.

Observaciones. — 1° La experiencia ha hecho adoptar el mismo radio para los círculos generadores C y C' : $r = \frac{7}{8} p$ próximamente.

2º Para obtener *perfiles rectilíneos* en los flancos de los dientes, es preciso tomar los radios de los círculos generadores, mitad de los radios de las circunferencias primitivas correspondientes (*Teorema de Lahire*, 49).

52. Engranajes de evolvente de círculo. — Principio del trazado. — Sean O y O' las circunferencias primitivas. Por su punto de contacto A , se traza una recta TT' inclinada sobre la línea de los centros un ángulo α ($\alpha = 75^\circ$ próximamente), luego se describen las circunferencias I e I' , tangentes a esta recta y concéntricas con O y O' . Cuando las rectas AT y AT' giran sin resbalar sobre los círculos I e I' , el punto A describe evolventes de círculo que son *curvas conjugadas*, constantemente tangentes durante la rotación de las ruedas de engranaje (fig. 45).

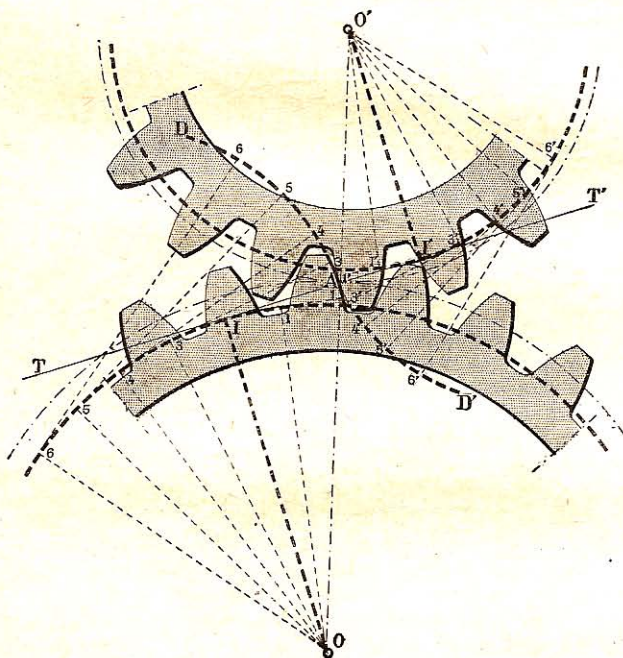


Fig. 45. — Engranaje de evolvente de círculo.

Trazado del engranaje. — Se dividen los círculos I e I' en partes iguales a partir de los puntos de tangencia de la recta TT' (puntos 1, 3, 4, 5, 6, ...); y se trazan tangentes por los puntos de división.

La *evolvente de círculo* AD se obtiene llevando sobre las tangentes longitudes $1\ 1 = IA - \text{arco } I1$, $3\ 3 = IA + \text{arco } I3$, $4\ 4 = IA + \text{arco } I4$, etc.; y la evolvente AD' , las longitudes:

$$1'1' = I'A - \text{arco } I'1', \quad 3'3' = I'A + \text{arco } I'3', \dots$$

La primera curva sirve de perfil a los *dientes de la rueda O*; la segunda a los *dientes del piñon O'*. La cara y el flanco de cada diente forman una misma curva; solo que, para completar la parte del flanco situada en lo interior de las circunferencias bases I e I' , se agrega una porción curvilínea que continúa la evolvente correspondiente.

El trazado de un diente completo y de la dentadura se verifica conforme se ha dicho antes (51).

53. Ventajas del engranaje de evolvente. — En la industria se prefiere el trazado por evolvente de círculo, porque :

1º El *espesor de los dientes* es, según las exigencias de la resistencia, mayor en el pie que en la cabeza;

2º La *distancia de los árboles* puede variar, por el desgaste, sin inconveniente notable, mientras que ha de permanecer invariable para que funcionen bien los engranajes cicloidales;

3º Los *piñones son intercambiables*, porque la forma de las evolventes depende de la inclinación α de la tangente TT' , y todos los piñones en que es constante dicho ángulo pueden engranar con la misma rueda.

La serie de los engranajes de un torno de roscar está formada por piñones de evolvente y de paso diámetro (44).

54. Cremallera. — La cremallera es un sistema de engranajes cilíndricos cuya rueda, de radio infinito, se convierte en una barra rectilínea dentada, Su longitud limitada exige que la rotación del piñón sea alternativa.

La cremallera se emplea en las máquinas de imprimir, las máquinas-

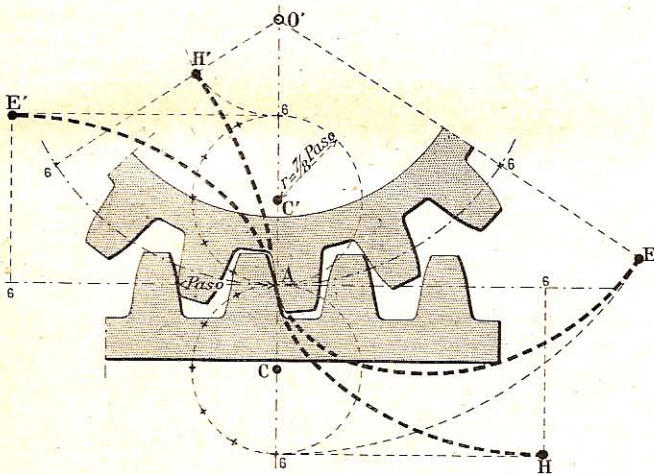


Fig. 46. — Cremallera de perfil cicloidal.

herramientas (torno, cepilladora), los gatos (162). En los ferrocarriles que suben pendientes considerables, un piñón, solidario de la locomotora, engrana con una cremallera colocada entre los rieles.

Se hace un segundo trazado sobre las bases menores de los troncos de cono; los radios y pasos se deducen del primer trazado :

$$\frac{r}{R} = \frac{r'}{R'} = \frac{p'}{p} = \frac{OM'}{OM}$$

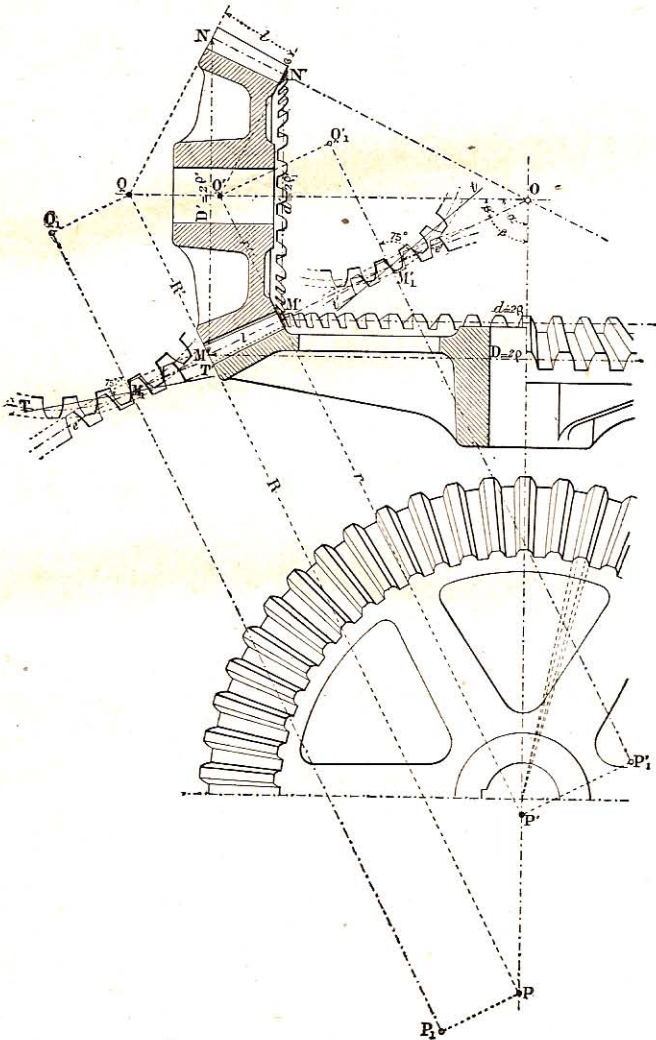


Fig. 48. — Engranajes cónicos.

56. Engranajes de tornillo sin fin. — Este engranaje helicoidal se compone de una rueda cilíndrica y de un tornillo sin fin. Generalmente el tornillo es el que mueve la rueda (fig. 49).

Los dientes de la rueda están inclinados sobre las generatrices del cilindro primitivo de un ángulo α igual a la inclinación de los filetes del tornillo :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{p}{\pi D} \quad (33).$$

Ventajas e inconvenientes. — 1º Se obtiene una *gran reducción del número de vueltas*. — Cuando el tornillo es de un filete, la rueda gira

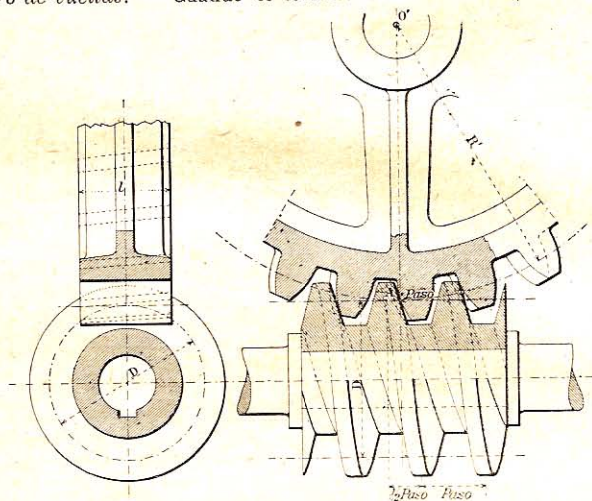


Fig. 49. — Engranaje de tornillo sin fin.

de un diente por vuelta entera del tornillo ; son pues precisas N vueltas de tornillo para una vuelta de la rueda, si ésta tiene N dientes.

2º Pero el rozamiento es considerable y es difícil el movimiento reversible : rara vez se guía el tornillo por medio de la rueda, a causa de la inclinación excesiva que habría que dar a los filetes.

Trazado. — El trazado del engranaje de tornillo sin fin es análogo al de la cremallera (54).

Cortemos el tornillo según su eje, por un plano normal a la superficie cilíndrica de la rueda.

Los filetes del tornillo aparecen como los dientes de la cremallera.

Observación. — Para aumentar las superficies en contacto, con objeto de transmitir grandes esfuerzos, se da a la dentadura de la rueda una forma cóncava : es ésta la *dentadura helicoidal tangente* (fig. 50).

57. Engranajes especiales. — Engranajes de dentadura angular. — La dentadura es helicoidal, pero los dientes están inclinados en sentido inverso en la mitad de su longitud (fig. 51). Estos engranajes tienen marcha muy regular y silenciosa ; tienden a sustituirse a las ruedas con dentadura de madera.

Engranajes cilíndricos helicoidales. — Los árboles no son paralelos. Las dentaduras son hélices tangentes en su punto de contacto, sobre el

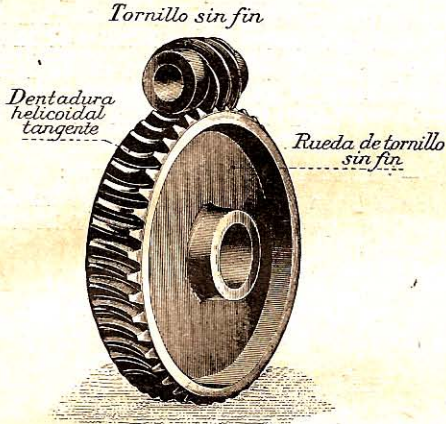


Fig. 50. — Engranaje de dentadura tangente.

diámetro primitivo; los pasos son iguales y se miden perpendicularmente a la dirección de los filetes (fig. 52). El movimiento es suave, pero el rozamiento considerable; estos engranajes de precisión se emplean en algunas máquinas herramientas.

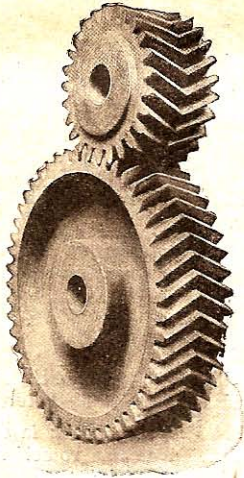


Fig. 51. — Engranaje de dentadura angular.



Fig. 52. — Engranaje helicoidal.

§ 2. — LEVAS

58. Clasificación de las levas. — Definición. — *Las levas son mecanismos por contacto directo (40) que transforman la rotación continua de un árbol en el movimiento rectilíneo alternativo de un vástago guiado.*

La leva es un disco acunado en el árbol y que se apoya sobre rodillos o sobre un marco que forma cuerpo con el vástago guiado.

Rodillos y marco se mantienen en contacto con la leva mediante muelles antagonistas.

Clasificación. — Se distinguen dos clases de levas :

1º Las *levas de rodillos* en que conociendo el diagrama del movimiento del vástago, se deduce el perfil de la leva (fig. 53). Tales son :

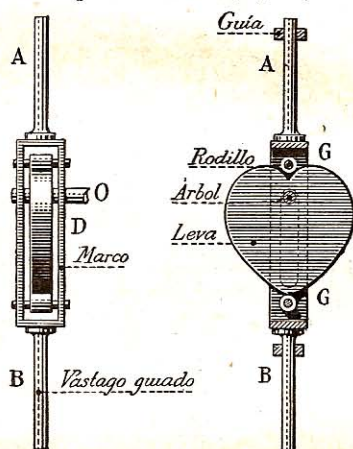


Fig. 53. — Leva de rodillos.

La *leva de corazón*, que imprime al vástago un movimiento uniforme ;
 La *leva Morin*, que le comunica un movimiento uniformemente variado ;
 Las levas diversas de motores de gas, telares mecánicos, prensas de imprenta, que producen movimientos variados.

2º Las *levas O excéntricas de cuadro O de marco*, en que conocido el perfil de la leva, se deduce el movimiento del vástago. Ej. : la *excéntrica circular*, la *excéntrica triangular*, etc.

I. — Levas de rodillos.

59. Problema de las levas. — Enunciado. — *Conociendo el diagrama del movimiento del vástago, determínese el perfil de la leva.*

Diagrama del movimiento. — Sea OABC el diagrama dado ; la abscisa OC del eje de los tiempos representa la duración de una rotación completa de la leva, rotación que suponemos uniforme y dividida en 10 partes iguales.

El movimiento del vástago guiado puede ser cualquiera; por ejemplo, uniforme, luego uniformemente variado y seguido de un reposo (fig. 54).

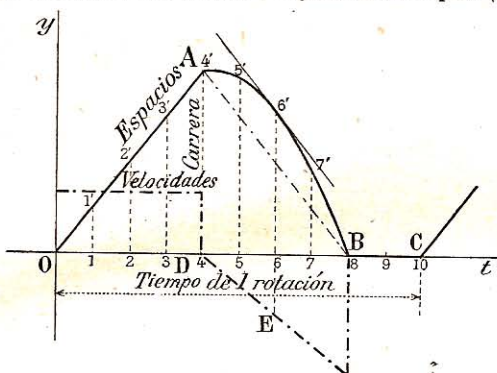


Fig. 54. — Diagrama del movimiento.

Trazado del perfil. — El plano de la figura es perpendicular al eje de rotación O ; Oa es el menor radio de la leva (fig. 55).

Tracemos una circunferencia de radio Oa , dividida en 10 partes iguales por radios vectores equiángulos.

Un punto cualquiera del perfil, $4'$ por ejemplo, se obtiene tomando sobre el radio $O4$ prolongado una longitud $4-4'$ igual a la ordenada $4-4'$ del diagrama.

Repetiendo la construcción para cada uno de los puntos, y uniendo éstos por un trazo continuo, el perfil teórico es la curva $a1'2' \dots 8'9'$. El rodillo se supone de diámetro nulo.

En la práctica se traza una circunferencia de radio igual al de rodillo en cada uno de los puntos del perfil teórico. El perfil real de la leva es la envolvente interior de todas estas circunferencias.

Es fácil comprobar que, cuando la leva ha girado en el sentido de la flecha, un ángulo cualquiera, $4/10$ de circunferencia, por ejemplo, el punto 4 viene sobre la vertical del centro O , y se eleva el rodillo de una altura igual a $4-4'$.

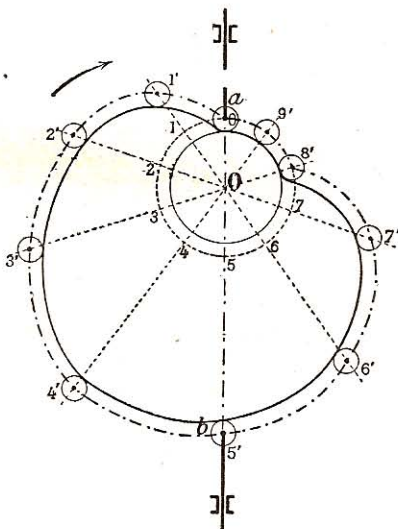


Fig. 55. — Trazado de la leva.

El trazado antedicho se aplica a todas las levas de rodillos: leva de corazón, leva Morin, levas de los motores de gas, de las prensas de imprimir, de los telares, etc.

60. Leva de corazón. — Diagrama. — El movimiento del vástago guiado es un *movimiento rectilíneo uniforme*. Su diagrama está formado por dos segmentos de recta simétricamente inclinados sobre el eje de los tiempos. La ida y la vuelta del vástago se efectúan con la misma velocidad (fig. 56).

Trazado del perfil. — La rotación uni-

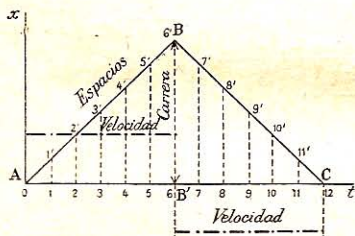


Fig. 56. — Diagrama del movimiento.

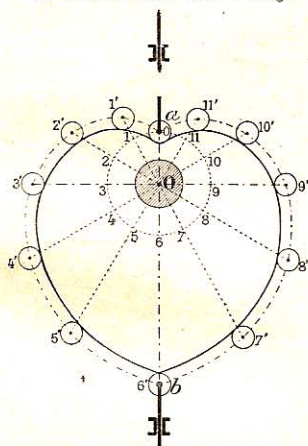


Fig. 57. — Trazado de la leva de corazón.

forme del árbol se supone dividida en 12 partes iguales (fig. 57). Para obtener un punto cualquiera del perfil, 4' por ejemplo, se lleva sobre el radio vector correspondiente la longitud 4—4' igual a la ordenada 4—4' del diagrama.

El perfil teórico está formado por dos arcos simétricos de espiral de Arquímedes.

61. Leva Morin. — La leva de corazón presenta el inconveniente de un cambio brusco de velocidad al final de su carrera.

Cuando no es necesaria la uniformidad del movimiento del vástago, se le sustituye el trazado del general Morin *.

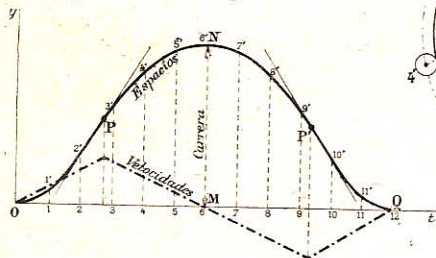


Fig. 58. — Diagrama del movimiento.

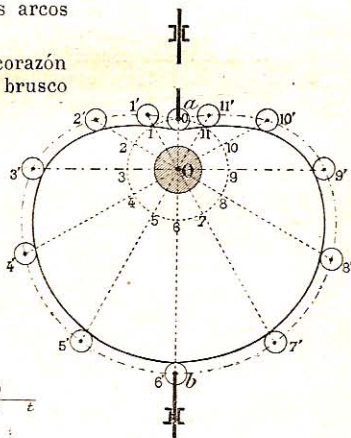


Fig. 59. — Trazado de la leva de Morin.

Diagrama. — La subida (o la bajada) del vástago, es primero *un movimiento uniformemente acelerado*, y luego uno *uniformemente retardado*. El diagrama está constituido por dos arcos de parábola, OP, PN, simétricos respecto de NM (fig. 58).

Trazado del perfil. — El trazado se verifica por el método conocido. La leva es simétrica respecto de *ab* (fig. 59).

II. — Levas o Excéntricas de cuadro.

62. Excéntrica circular de cuadro. — Problema. — El problema general de las excéntricas de cuadro es el siguiente :

Conociendo el perfil de una leva que se apoya en un cuadro, determinar el diagrama del movimiento de la varilla unida con el cuadro.

La leva más sencilla es la de *perfil circular*.

Diagrama del movimiento. — Es-tando constantemente el centro C del disco en medio de la altura del cuadro, sus posiciones extremas limitarán la carrera del aparato (fig. 60).

El movimiento del vástago guiado es pues el de la proyección de C sobre el eje AB, es decir un movimiento senoidal.

El *diagrama del movimiento* es una senoide (fig. 61), cuyo trazado se conoce. Durante la subida, *la velocidad* primero nula, crece, pasa por un máximo, y luego disminuye y se anula. La bajada ofrece las mismas variaciones que la subida.

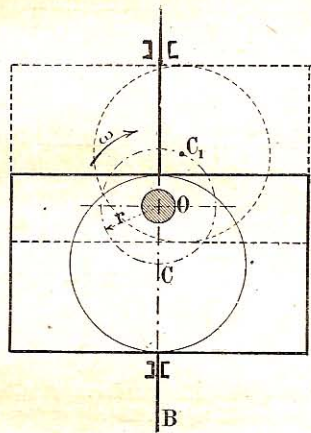


Fig. 60. — Excéntrica circular.

63. Excéntrica triangular de cuadro. — Perfil de la leva. — El perfil de la excéntrica triangular se compone de tres arcos de círculo des-

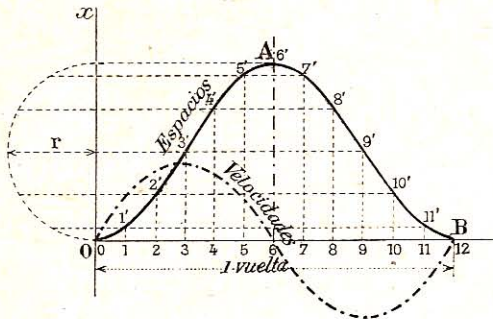


Fig. 61. — Diagrama del movimiento de la excéntrica circular.

critos desde los vértices de un triángulo equilátero. El centro O del árbol corresponde a uno de los vértices (fig. 62).

Diagrama del movimiento. — Es fácil comprobar que a cada rotación del árbol O , el movimiento del vástago T comprende cuatro fases:

Reposo, durante una sexta parte de vuelta;

Subida, durante un tercio de vuelta;

Reposo, durante una sexta parte de vuelta;

Bajada, durante un tercio de vuelta.

La velocidad, nula primero, crece, disminuye después de alcanzar un máximo, y se anula.

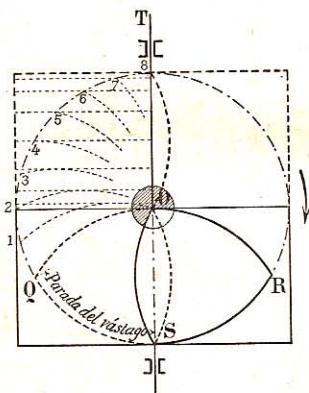


Fig. 62. — Excéntrica triangular.

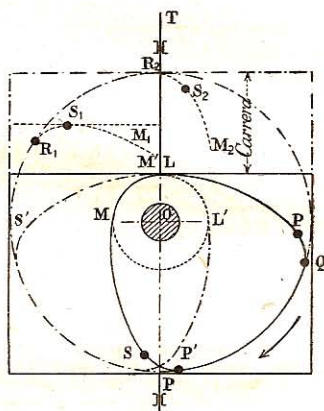


Fig. 62*. — Excéntrica de Trezel.

Después del segundo reposo, la bajada presenta las mismas variaciones que la subida (fig. 63).

La leva o *excéntrica de Trezel*, (fig. 62*), es una modificación acertada de la excéntrica triangular.

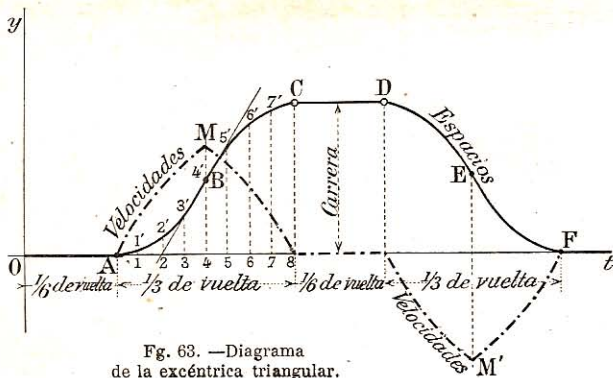


Fig. 63. — Diagrama de la excéntrica triangular.

§ 3. — POLEAS DE TRANSMISIÓN

64. Transmisión por enlaces flexibles. — Las poleas transmiten, mediante un *enlace flexible*, una rotación de un árbol a otro.

El enlace es una *correa* plana, de cuero o de caucho, un *cable* redondo de

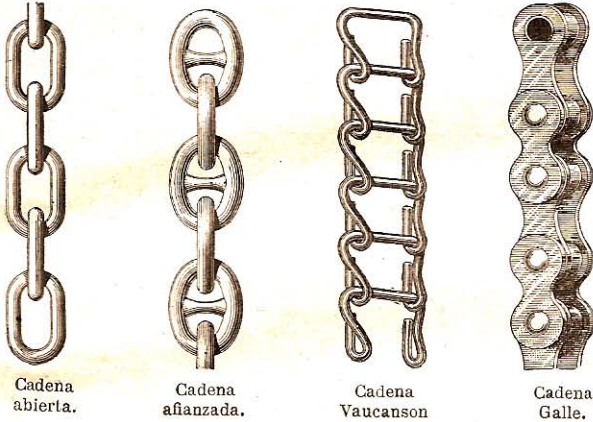


Fig. 64. — Cadenas de transmisión.

cáñamo o de alambre de acero, una *cadena* ordinaria, de eslabones abiertos o afianzados, una cadena articulada, *Vaucanson** o *Galle* (fig. 64 y 65).

Las *poleas para cadenas* tienen en su llanta un perfil que permite la adaptación exacta de los eslabones.

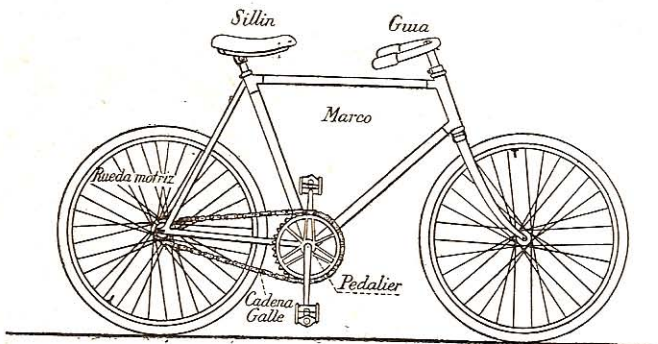


Fig. 65. — Bicicleta. — Transmisión por cadena Galle.

Una *polea para correa* se compone : de un *cubo* acunado en el árbol de la polea, de una *llanta* circunferencial y de varios *brazos*, rectos o curvos (fig. 66).

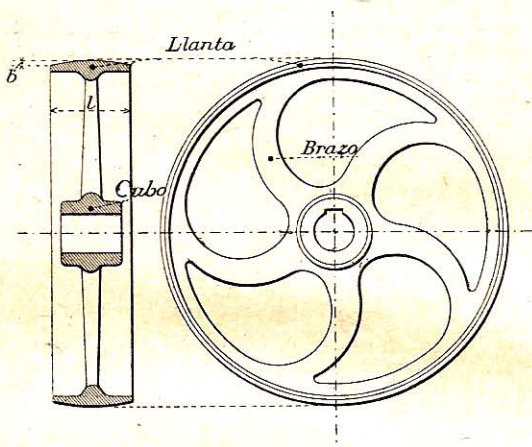


Fig. 66. — Polea de transmisión para correa.

La llanta está bombeada ($b = \frac{1}{20} l$); demuestra la experiencia que la correa tiende a subir al punto más elevado y a colocarse sola en el plano medio de la polea.

65. Transmisión por correas. — Para que una correa no caiga de una polea, es necesario que la línea media del ramal arrollado esté en el plano medio de la polea.

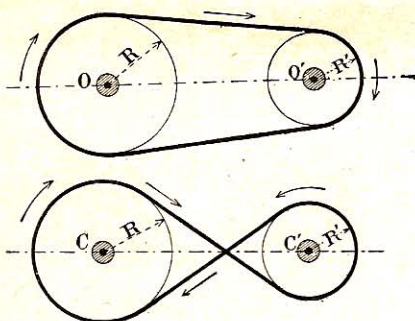


Fig. 67. — Correa de transmisión entre dos árboles paralelos.

tra otro en el cruce y se gastan más rápidamente.

A) Árboles paralelos. — Las poleas están en el mismo plano vertical (fig. 67).

1^o *Correa recta.* — Cuando la correa es tangente exteriormente a las poleas, los dos árboles O y O' giran en el mismo sentido.

2^o *Correa cruzada.* — Si la correa es tangente interiormente a las poleas, los dos árboles C y C' giran en sentido contrario. El arco abrazado por la correa es mayor, lo cual aumenta la adherencia y facilita el arrastre, pero los dos ramales de la correa rozan uno contra otro en el cruce y se gastan más rápidamente.

B) Árboles no paralelos. — Los árboles se cruzan sin encontrarse (fig. 68).

Correas semicruzadas. — Las poleas están dispuestas de modo que el punto de salida, s o s_1 , de la correa sobre una polea esté en el plano medio de la otra polea.

La condición se realiza para las poleas P y P' con tal que los sentidos de la marcha sean los de las flechas. Sigue realizándose con las poleas P y P'_1 .

66. Transmisiones con poleas guías. —

Cuando no se realizan las condiciones anteriores, se emplean *poleas guías* que orientan la correa en el plano medio de la polea en que se arrolla.

1º **Caso general.** — Los planos medios de las poleas de transmisión A y B forman un diedro cuya arista es IJ . Por dos puntos cualesquiera M y N de la arista se trazan las tangentes a los círculos; los dos planos así determinados serán los de las poleas guías C y D : su eje será normal a dichos planos y estará en el bisector del diedro.

Existen dos dispositivos, según giren las poleas o no en el mismo sentido (fig. 69).

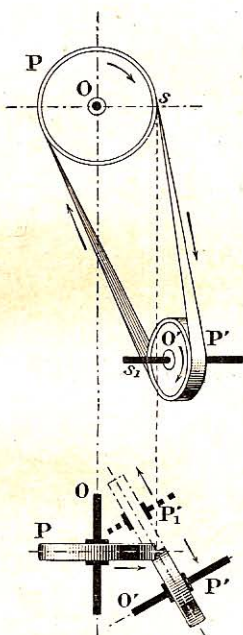


Fig. 68. — Correas entre dos árboles no paralelos.

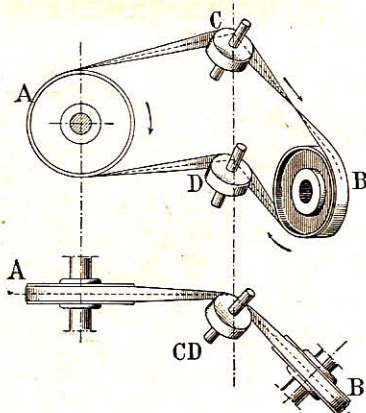
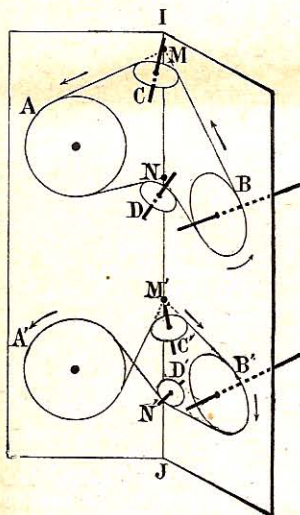


Fig. 69. — Transmisión por poleas guías.

2º Casos particulares. — *Primer dispositivo.* — Cuando los planos medios de las poleas A y B son paralelos, su intersección se verifica en el infinito y los ramales de la correa son paralelos.

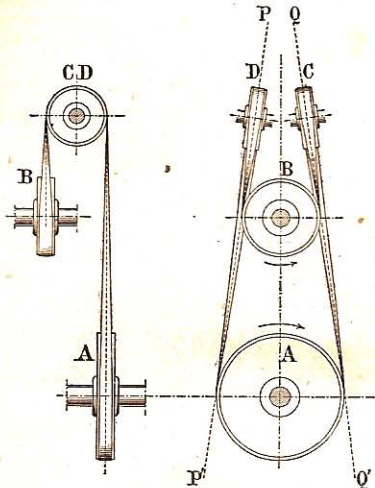


Fig. 70. — Primer dispositivo.

La distancia de los dos planos medios determina los diámetros de las poleas guías C y D (fig. 70).
La correa puede moverse en ambos sentidos.

Segundo dispositivo. — Cuando la intersección de los planos medios es horizontal o vertical, las líneas medias de los ramales están en los planos medios de las poleas. El eje común de las poleas guías C y D está en el plano bisector del diedro (fig. 71).

67. Velocidad de las poleas. — Relación de las velocidades. — La velocidad de

la correa que une dos poleas es la misma en todos sus puntos. Si no hay resbalamiento de la correa, se aplica a las poleas la fórmula de las ruedas de fricción y de los engranajes (45) :

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{R'}{R} = \frac{N}{N'}$$

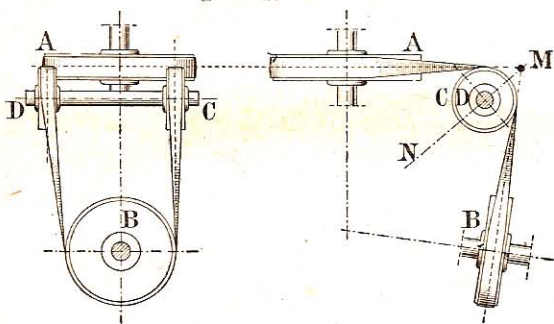


Fig. 71. — Segundo dispositivo.

Tren de poleas. — Como para los trenes de ruedas dentadas (46) :

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{r_1 r' r''}{RR'R''}$$

68. Poleas locas. Conos de poleas. — *Poleas locas.* — Aseguran la independencia de la marcha de las máquinas herramientas movidas por correas. Al lado de una *polea fija*, acuñada en el árbol de trans-

mision intermedio, que recibe por una correa el movimiento del árbol de transmisión principal del taller, se instala una *polea loca*, mantenida en su puesto por anillos laterales (fig. 31 y 72). La correa se traslada alternativamente de una a otra polea por medio de una *horquilla de embrague*.

Conos de poleas. — Cuando en una máquina conviene tener velocidades muy diferentes, se usan *poleas escalonadas*, llamadas también *conos de poleas*, instaladas, en sentido inverso sobre la máquina herramienta y sobre el árbol de transmisión (fig. 72).

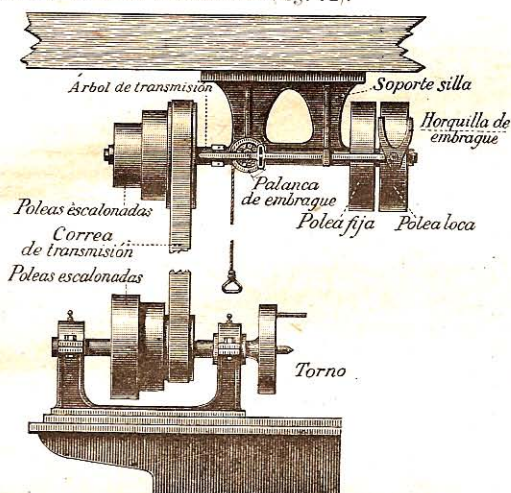


Fig. 72. — Transmisión por correas, con poleas y embrague.

Siendo los respectivos radios de las poleas R_1, R_2, R_3 , y r_1, r_2, r_3, \dots se tiene:

$$R_1 + r_1 = R_2 + r_2 = R_3 + r_3 = \dots \quad (1)$$

69. Problemas sobre las poleas. — 1º *Determinar el diámetro de una polea que ha de dar 300 vueltas por minuto; la polea motriz tiene 2^m,40 y da 100 vueltas.*

$$\text{El diámetro } D = 2^m,40 \times \frac{100}{300} = 0^m,80.$$

2º *Tres poleas escalonadas tienen 120, 180, y 240 milímetros de diámetro. — Calcúlense las velocidades de la herramienta cuando el árbol de transmisión da 120 vueltas por minuto.*

$$1^a \text{ velocidad: } x_1 = 120 \times \frac{240}{120} = 240 \text{ vueltas.}$$

$$2^a \text{ velocidad: } x_2 = 120 \times \frac{180}{180} = 120 \text{ vueltas.}$$

$$3^a \text{ velocidad: } x_3 = 120 \times \frac{120}{240} = 60 \text{ vueltas.}$$

¹ Esta igualdad se verifica cuando se trata de correas cruzadas, pero es sólo aproximada para las correas rectas.

§ 4. — MECANISMOS ARTICULADOS

1. — Biela. Manubrio. Excéntrica.

70. Bielas de acoplamiento. — Los mecanismos articulados son órganos de transmisión por *enlace rígido* (40).

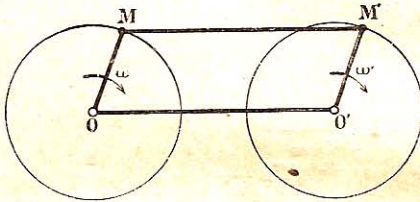


Fig. 73. — Paralelogramo articulado.

El tipo de estos mecanismos es el *paralelogramo articulado*. Imaginemos un paralelogramo $OO'MM'$ (fig. 73) cuyos vértices sean *ejes de articulación*, normales al plano de la figura; el lado OO' está fijo, los otros tres son *manubrios*, OM y $O'M'$ son *manubrios*; MM' es una *biela*.

El movimiento de los manubrios es una rotación alrededor de O o de O' ; el de la biela es una traslación paralela a OO' .

Las velocidades angulares son iguales: $\omega = \omega'$ y de igual sentido.

Las *bielas de acoplamiento* de las locomotoras son la realización práctica de este mecanismo (fig. 74).

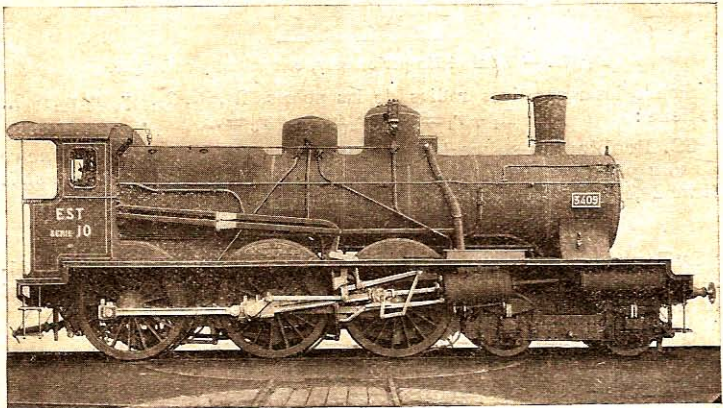


Fig. 74. — Locomotora de gran velocidad (C* del Este, en París).

71. Biela y Manubrio. — Descripción. — Este mecanismo se compone de un *manubrio* M , acunado sobre un árbol O y articulado con

una *biela* AB; el extremo B de la biela se une con un vástago guiado BC, cuya dirección pasa por el centro O (fig. 75).

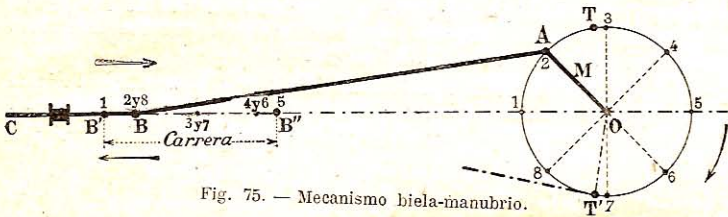


Fig. 75. — Mecanismo biela-manubrio.

La rotación continua del árbol se transforma en una traslación rectilínea alternativa del vástago y recíprocamente.

Este mecanismo articulado se emplea mucho: máquinas de vapor, motores de gas, bombas, máquinas herramientas (fig. 76).

Puntos muertos. — Cuando la biela está en línea recta con el manubrio (posiciones 1 y 5, fig. 75), el mecanismo está en sus *puntos muertos*: un

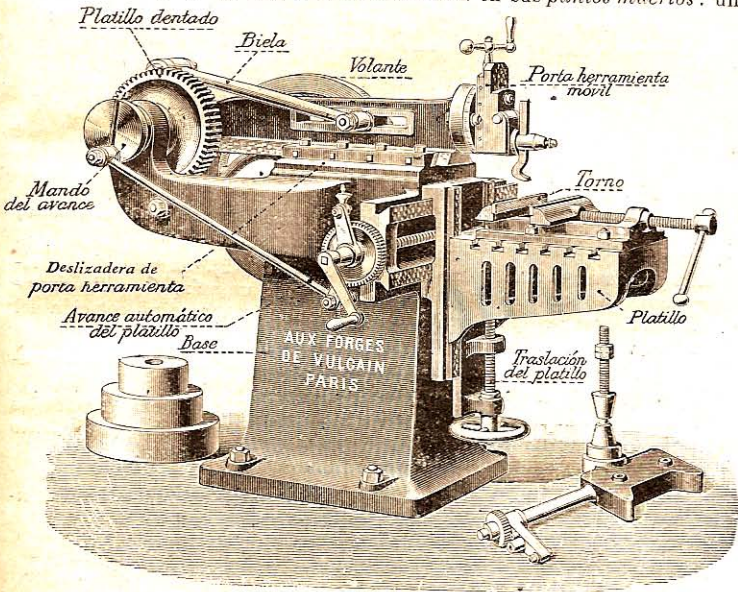


Fig. 76. — Limadora.

motor parado en esta posición, no puede arrancar a impulsos del embolo, Los *volantes* hacen salvar los puntos muertos durante la marcha de la máquina y sirven de viradores durante las paradas. En las locomotoras, se emplean dos manubrios montados sobre el mismo eje y calados a 90° (Colisa de Walschaerts).

Un *plato circular* metálico A acuñado sobre un árbol motor O, y excéntrico respecto de dicho árbol;

Un *collar de excéntrica* C, en dos partes ensambladas con pernos, para facilitar el montaje;

Una *barra o biela de excéntrica* B, que enlaza el collar con el vástago guiado y le comunica un movimiento rectilíneo alternativo.

Movimiento. — Siendo el punto D el centro del platillo, las rectas OD y BD conservan longitudes constantes durante la marcha; el movimiento del vástago guiado BT es pues el mismo que si fuese producido por una biela BD y un manubrio OD, de longitud igual al radio de excentricidad.

Observación. — Por causa del rozamiento del collar C, la excéntrica absorbe una fuerza relativamente considerable; en cambio, su instalación sobre el árbol motor es sencilla.

74. Colisa de Stephenson. — Descripción. — La colisa de Stephenson* se compone de dos excéntricas C y C', acuñadas sobre el árbol motor O con excentricidades mayores que 90° y simétricamente opuestas respecto del manubrio. Las *barras de excéntrica* B, B', se articulan con una colisa en forma de arco de círculo (fig. 79).

Una biela de suspensión y un sistema de palancas articuladas suben o bajan la colisa, haciéndola deslizar sobre el extremo del vástago guiado T (*colisión o cabeza del vástago*) que termina dentro de la ranura de la colisa.

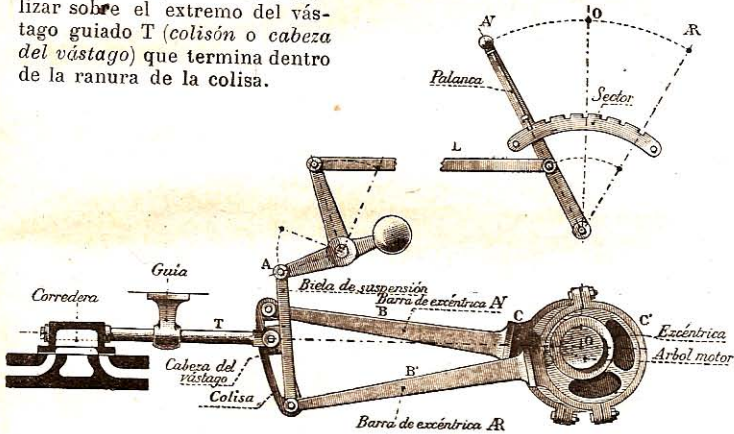


Fig. 79. — Conjunto de la colisa de Stephenson.

El movimiento de las excéntricas es transmitido por la colisa a la corredera. Su efecto sobre ésta depende de la posición del colisión respecto de los extremos de la colisa. Predomina la acción de la excéntrica C o de la excéntrica C' según esté el colisión más cerca de B o de B'. En la posición intermedia la corredera no llega a descubrir las lumbreras de admisión (221).

La colisa de Stephenson sirve para *cambiar la marcha* o variar el grado de expansión en las máquinas de vapor.

cribe una *curva en forme de ocho*, simétrica respecto de la línea OO' (fig. 81). La experiencia demuestra que si las manivelas y la biela son bastante largas, una de las ramas de la curva se confunde sensiblemente con una vertical qq' .

La adición del paralelogramo articulado $KCJH$ tiene por objeto amplificar, en el punto J , el movimiento del punto Q .

No se utiliza más que la parte rectilínea de las curvas; se articula en J la cabeza del émbolo, y en Q , el vástago de una de las bombas (fig. 80).

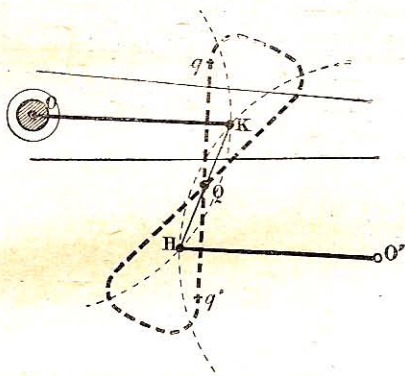


Fig. 81. — Paralelogramo de Watt.

76. Inversor o rombo de Peaucellier. — El *inversor* del general *Peaucellier* es un rombo articulado $ABCD$, cuyos vértices opuestos C y D están unidos con un punto fijo O por medio de varillas iguales OC y OD .

El punto fijo puede estar en el interior del rombo (fig. 82) o en el

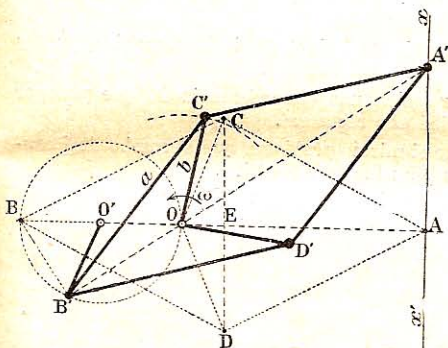


Fig. 82. — Primera disposición del inversor.

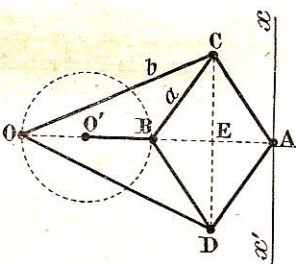


Fig. 82*. — Segunda disposición.

exterior (fig. 82*), pero los tres puntos A, B, O , quedan constantemente en línea recta cuando se deforma el aparato, y esta línea es perpendicular a CD en su punto medio.

El mecanismo se completa con un manubrio $O'B$, de radio igual a OO' .

Cuando la línea de los centros OO' es horizontal, el punto A sigue la vertical xx' , en este punto puede articularse el vástago del émbolo de la máquina de Watt.

Observación. — Esta solución elegante permite la transformación rigurosa de un movimiento rectilíneo en un movimiento circular, cosa que el paralelogramo de Watt no resuelve sino de un modo aproximado. Pero el rombo de Peaucellier tiene el inconveniente de exigir seis bielas y un manubrio, lo cual lo hace poco práctico.

77. Inversor de Hart. — Este inversor es un *contraparalelogramo articulado* compuesto de bielas iguales de dos en dos: $AD=BC$ y $AC=BD$ (fig. 83).

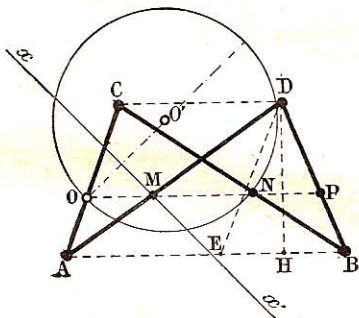


Fig. 83. — Inversor de Hart.

El punto O está fijo. En el movimiento del inversor los puntos O, M, N, P, quedan en una misma paralela a AB.

Cuando el punto N se mueve sobre una circunferencia O' , que pasa por el punto O, el punto M describe una recta $x'x'$.

El inversor de Hart resuelve el mismo problema que el rombo de Peaucellier, pero con cuatro bielas y un manubrio $O'N$.

SEGUNDA PARTE

ESTÁTICA

CAPÍTULO I

ESTÁTICA DEL PUNTO MATERIAL

SUMARIO :

§ 1. *Fuerza y masa* : Principio de la inercia. Fuerza. Masa. Peso. — Medida de las fuerzas y de las masas. — Sistema métrico. Sistema C. G. S.

§ 2. *Composición de las fuerzas* : Principio de Galileo. — Composición de fuerzas concurrentes. — Paralelogramo, paralelepípedo, polígono de fuerzas. — Descomposición de fuerzas.

§ 3. *Equilibrio del punto material* : Equilibrio del punto libre. — Equilibrio de un punto sobre una curva o sobre una superficie.

§ 4. *Momento de las fuerzas* : Momento respecto de un punto, respecto de un eje. — Teoremas de Varignon.

§ 1. — FUERZA Y MASA

I. — Principio de la inercia.

78. Estática. Principio de la inercia. — La Estática es la *ciencia del equilibrio de las fuerzas*.

Se distingue de la Cinemática por tener en cuenta la materia que constituye los cuerpos y sus masas; se distingue de la Dinámica en que estudia sólo la materia en reposo.

Principios fundamentales. — Las leyes de la Estática y de la Dinámica descansan sobre los *principios fundamentales de la Mecánica* debidos a Kepler*, Newton* y Galileo*. Estos principios, deducidos de la observación de los hechos, no son evidentes *a priori*, pero se justifican por el acuerdo entre sus consecuencias lógicas y los movimientos que se observan en el Universo.

Principio de la inercia. — *La materia no puede por sí misma modificar su estado de reposo o de movimiento (Kepler*)*.

Un punto material aislado, abandonado a sí mismo, queda inmóvil o animado de un movimiento rectilíneo uniforme: su *aceleración es nula*.

79. Fuerza. — **Definición.** — Según el principio de la inercia, las causas que tienden a modificar la velocidad de un punto material, son exteriores al mismo; se les da el nombre de **fuerzas**.

Así pues una *fuerza es toda causa de aceleración*.

La naturaleza de las fuerzas es desconocida, pero se puede medir cada una por sus efectos, y en particular por la aceleración que imprime a un punto material.

Es necesaria una convención para precisar la relación que une la aceleración con la fuerza que la produce.

Vector fuerza. — Sea un punto material libre M, que describe la trayectoria S'S bajo la acción de una fuerza; posee, en el instante t , una aceleración γ , medida por el vector $M\Gamma$ (fig. 84).

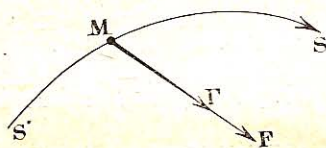


Fig. 84. — Vector fuerza.

Por convención, se representa la fuerza aceleradora por un vector MF de igual origen, igual dirección e igual sentido que el vector MΓ, y cuya magnitud es el número $m\gamma$, igual al producto de la aceleración por un

número positivo que mide la masa del punto material.

La fuerza F está pues determinada por la relación geométrica:

$$(F) = m(\gamma),$$

que es la *ecuación fundamental de la Mecánica*.

El punto M es el *punto de aplicación* de la fuerza, la dirección MF es su *línea de acción*, la magnitud MF representa su *intensidad*.

80. Masa. — La masa de un punto material es una característica de dicho punto; depende únicamente de la materia que lo constituye¹.

¹ Se comprueba aplicando una misma fuerza a diferentes cuerpos en reposo. La experiencia enseña que no adquieren la misma velocidad; « hay pues, para cada

La masa de un punto material es invariable. Así pues, varias fuerzas $F_1, F_2, F_3 \dots$, actuando sucesivamente sobre un mismo punto material libre, le comunican aceleraciones $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \dots$, tales que :

$$\frac{F_1}{\gamma_1} = \frac{F_2}{\gamma_2} = \frac{F_3}{\gamma_3} = \dots = m.$$

De estas ecuaciones se deduce la siguiente definición :

La masa de un punto material es la *relación constante entre las fuerzas y las aceleraciones* que comunican sucesivamente al punto material.

81. Fuerza constante. — Toda fuerza constante, en magnitud y en dirección, comunica a un punto material libre una aceleración constante y un *movimiento rectilíneo uniformemente variado*.

Recíprocamente. — Un punto material, animado de semejante movimiento está bajo la acción de una fuerza constante dirigida según la trayectoria rectilínea y en el sentido de la aceleración.

82. Principio de igualdad de la acción y de la reacción. — *Cuando un punto material obra sobre otro punto material, éste reacciona sobre el primero con una fuerza igual y de sentido contrario (Newton*)*.

Todo objeto apoya sobre la mano que lo sostiene; el esfuerzo muscular ejercido por la mano para sostener el objeto es la reacción.

El caballo que tira de un barco, obra sobre la cuerda de sirga; ésta reacciona sobre el caballo tirando de él hacia atrás.

II. — Unidades de medida. — Sistema C. G. S.

83. Peso. — Las fuerzas y las masas se miden por comparación con los pesos.

1º Peso absoluto. — En la superficie de la Tierra, todo punto material, abandonado a sí mismo, cae según la vertical del lugar con una aceleración g (22). Esta aceleración, debida a la gravedad, es constante en un mismo lugar, pero varía con la altitud y la latitud.

En un lugar determinado, la atracción terrestre sobre un punto material es pues una *fuerza constante*, dirigida según la vertical; se la llama *peso absoluto* de dicho punto.

cuerpo, una dificultad mayor o menor en ponerse en movimiento, y esta dificultad más o menos considerable constituye una propiedad específica del cuerpo; expresamos dicha particularidad diciendo que los diferentes cuerpos tienen *masas* más o menos grandes» (P. JANET : *Electrotécnica*, I, p. 2). — Se leerá con interés la cita que hace el autor de Maxwell para precisar la idea física de la masa. (MAXWELL : *El Calor*).

Sea p el peso absoluto de un punto material de masa m ;
se verifica :

$$m = \frac{F}{\gamma} = \frac{p}{g} ;$$

de donde :

$$p = mg.$$

Observación. — El peso absoluto varia, como g , con la altitud y la atitud.

2º **Peso de un cuerpo.** — Sean m_1, m_2, m_3, \dots , las masas de los puntos materiales que constituyen un cuerpo. La masa total es la suma :

$$M = m_1 + m_2 + m_3 + \dots$$

En un mismo lugar, los puntos tienen la misma aceleración g .
Los pesos absolutos de los puntos son pues :

$$p_1 = m_1g, \quad p_2 = m_2g, \quad p_3 = m_3g, \dots$$

El peso absoluto del cuerpo es la suma :

$$P = p_1 + p_2 + p_3 + \dots = (m_1 + m_2 + m_3 + \dots)g = Mg.$$

Así pues, el peso absoluto de un cuerpo es el producto de la masa total del cuerpo por la aceleración de la gravedad.

84. Medida estática de las fuerzas. — Se comparan las fuerzas con los pesos por medio de los *dinamómetros*¹.

Los dinamómetros están formados por muelles de acero, generalmente en forma de V (fig. 85) o de hélice (fig. 86) que se doblan bajo la acción de las fuerzas.

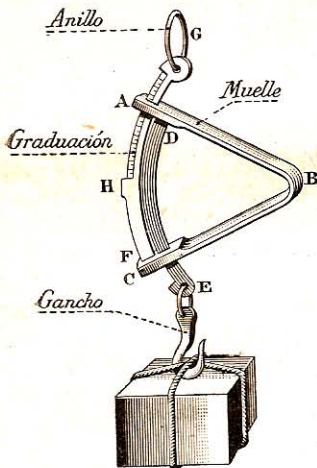


Fig. 85. — Dinamómetro o pesón.

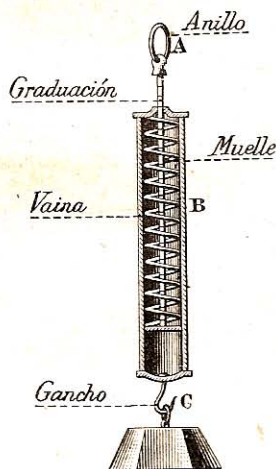


Fig. 86. — Dinamómetro de Leroy.

¹ En resumidas cuentas, se miden las fuerzas :

1º Por sus efectos dinámicos, aplicando la fórmula fundamental : $(F) = m (\gamma)$;

2º Por sus efectos estáticos, comparándolas con los pesos.

Se gradúan colgando pesas conocidas y señalando en un índice las flexiones correspondientes.

Si una fuerza, v. g. la tracción de un caballo, actúa en un dinamómetro, la flexión del muelle indica la intensidad de la fuerza.

85. Medida de las masas. — En un mismo lugar los pesos de los cuerpos son proporcionales a sus masas.

Sean M_1, M_2, M_3, \dots las masas de varios cuerpos, y P_1, P_2, P_3, \dots sus pesos en un mismo lugar, donde sea g la aceleración de la gravedad.

Se verifica: $P_1 = M_1g, P_2 = M_2g, P_3 = M_3g, \dots$

de donde:
$$g = \frac{P_1}{M_1} = \frac{P_2}{M_2} = \frac{P_3}{M_3} = \dots$$

Así pues, para determinar la masa de un cuerpo, basta encontrar su peso absoluto por medio de una balanza.

Se coloca el cuerpo en uno de los platillos, se equilibra con una tara colocada en el otro platillo, luego se quita el cuerpo y se reemplaza con pesas, de modo que se restablezca el equilibrio. *El cuerpo y las pesas tienen la misma masa*, puesto que ejercen sobre el platillo acciones iguales.

86. Unidades fundamentales en Mecánica. — En *Cinemática* se emplean dos unidades fundamentales: la de *longitud* y la de *tiempo*, de donde se deducen las unidades derivadas de *velocidad* y de *aceleración*.

En *Estática* y en *Dinámica* se usan tres unidades fundamentales: la de *longitud*, la de *tiempo*, y una tercera, que es la de *fuerza* o de *masa*, según se emplea el sistema métrico o el sistema C. G. S.

87. Sistema métrico. — El sistema métrico se emplea en las aplicaciones industriales, excepto en electricidad.

1º Las *unidades fundamentales* son el metro, el segundo de tiempo medio y el kilogramo-fuerza.

El kilogramo-fuerza es el peso absoluto (en París) de un decímetro cúbico de agua destilada a 4º, su máximo de densidad.

Existe un kilogramo-tipo, de platino iridiado, conservado en la Oficina internacional de Pesas y Medidas, en Sevres, cerca de París.

2º La *unidad de masa* es una unidad derivada. Se la define por medio de la fórmula:

$$p = mg, \text{ de donde } m = \frac{p}{g}$$

Para tener $m = 1$, es preciso tomar $p = g$.

Luego, la unidad de masa es la masa de un cuerpo cuyo peso es g kilogramos-fuerza.

Así pues, la unidad de masa es la masa de un cuerpo que pesa 9,8088 kgs. en París, 9 kilogramos 781 en el ecuador, y 9 kilogramos 831 en el polo (22).

El inconveniente del sistema métrico es que la unidad de masa, que es una magnitud invariable, (80) está expresado con números que difieren según los lugares.

88. Sistema C. G. S. — 1º Para evitar este inconveniente, el congreso de electricistas adoptó, en 1881, las unidades fundamentales siguientes: el centímetro (C), el gramo-masa (G), y el segundo de tiempo medio (S).

El gramo-masa es la masa de un centímetro cúbico de agua destilada a 4º.

2º La unidad de fuerza es una unidad derivada. Se la define por la ecuación:

$$F = m\gamma; \text{ basta elegir } m = 1 \text{ y } \gamma = 1.$$

Así pues, la unidad de fuerza es la fuerza capaz de comunicar a la unidad de masa (gramo-masa), una aceleración igual a la unidad de longitud (centímetro).

La unidad de fuerza se llama dina; vale próximamente 1 miligramo-fuerza. En efecto, la unidad de masa, sometida a la acción de 1 gramo masa, adquiere una aceleración $g = 981$ cm. (en París). Ahora bien la dina, obrando sobre la misma unidad de masa, ha de producir una aceleración $\gamma = 1$ cm.

Luego
$$1 \text{ dina} = \frac{1 \text{ gr}}{981} \text{ (en París).}$$

El gramo-fuerza vale pues 981 dinas.

La dina varía, como los pesos absolutos, con la altitud y la latitud.

§ 2. — COMPOSICIÓN DE FUERZAS

89. Principio de la independencia de los efectos de las fuerzas. — Este principio, debido a Galileo*, puede expresarse del modo siguiente:

Cuando varias fuerzas obran simultáneamente sobre un punto material, cada fuerza produce su efecto como si estuviera sola; la aceleración que le imprimen juntas es la suma geométrica de las que le imprimirían separadamente.

La composición de las fuerzas concurrentes es consecuencia del principio de Galileo.

90. Composición de fuerzas. — Componer fuerzas es buscar su resultante, si existe.

La *resultante* es una fuerza única que produce, por sí sola, el mismo efecto que las fuerzas dadas al obrar juntas.

Las *componentes* son las fuerzas que reemplaza la resultante.

91. Composición de fuerzas concurrentes. — Varias fuerzas son concurrentes cuando se aplican simultáneamente a un mismo punto material.

Del principio de Galileo se deduce el teorema siguiente :

Teorema. — *La resultante de un sistema de fuerzas concurrentes es igual a suma geométrica.*

Sean F_1, F_2, \dots, F_n , las fuerzas concurrentes aplicadas al punto material M, de masa m (fig. 87).

Cuando obran separadamente sobre el punto M, le comunican aceleraciones $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$, tales que :

$$(F_1) = m(\gamma_1), \quad (F_2) = m(\gamma_2), \dots$$

$$(F_n) = m(\gamma_n).$$

Cuando obran juntas sobre el punto M, le comunican una aceleración γ igual a la suma geométrica (89) :

$$(\gamma) = (\gamma_1) + (\gamma_2) + \dots + (\gamma_n).$$

Ahora bien, esta aceleración γ puede considerarse como producida por una fuerza única R :

$$(R) = m(\gamma).$$

Pero $m(\gamma) = m(\gamma_1) + m(\gamma_2) + \dots + m(\gamma_n)$;

de donde : $(R) = (F_1) + (F_2) + \dots + (F_n)$.

La resultante es pues la suma geométrica de las componentes.

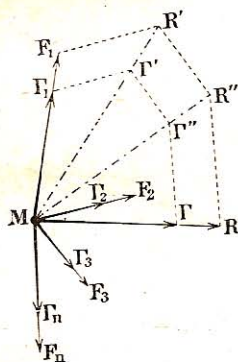


Fig. 87. — Composición de fuerzas concurrentes.

92. Resultante de dos fuerzas concurrentes. — 1º *La resultante de dos fuerzas concurrentes está representada por la diagonal del paralelogramo construido con ambas fuerzas* (fig. 88).

La suma geométrica de los dos vectores MF_1 y MF_2 , que representan las fuerzas, es la diagonal MR del paralelogramo de los vectores (3).

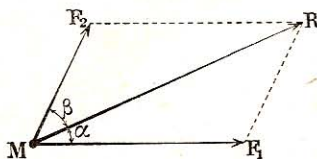


Fig. 88. — Composición de dos fuerzas concurrentes.

2º **Valor de la resultante.** —

Sean α y β los ángulos de la resultante con cada una de las componentes. En el triángulo MF_1R , se verifica :

$$3^\circ$$

$$F^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos(\alpha, \beta);$$

$$\frac{F_1}{\sin \beta} = \frac{F_2}{\sin \alpha} = \frac{R}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$\frac{F_1}{\sin(R, F_2)} = \frac{F_2}{\sin(R, F_1)} = \frac{R}{\sin(F_1, F_2)}$$

Luego la relación de cada fuerza con el seno del ángulo de las otras dos es constante.

En el caso particular de *componentes rectangulares*, se verifica:

$$F_1 = R \cos \alpha \quad \text{y} \quad F_2 = R \cos \beta;$$

y

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2.$$

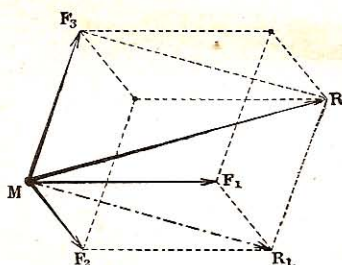


Fig. 89. — Composición de tres fuerzas concurrentes.

93. Resultante de tres fuerzas concurrentes. —

La resultante de tres fuerzas concurrentes, que no están en un mismo plano, está representada por la diagonal del paralelepípedo construido sobre dichas fuerzas (fig. 89).

La suma geométrica de los tres vectores fuerzas MF_1 , MF_2 , MF_3 es la diagonal MR del paralelepípedo de los vectores (3).

2° Valor de la resultante. — En el caso particular de *componentes rectangulares* (fig. 90), se verifica:

$$F_1 = R \cos \alpha,$$

$$F_2 = R \cos \beta,$$

$$F_3 = R \cos \gamma;$$

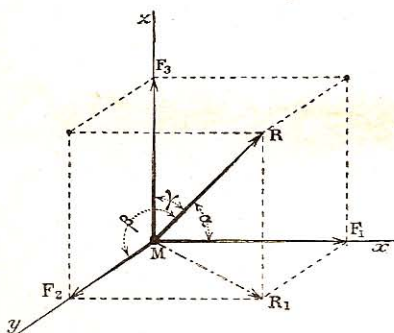


Fig. 90.
Resultante de tres fuerzas rectangulares.

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2.$$

94. Resultante de un sistema de fuerzas concurrentes. — 1°

La resultante de un sistema de fuerzas concurrentes está representada por el vector que cierra el polígono construido sobre dichas fuerzas (fig. 87).

La suma geométrica de los vectores fuerzas MF_1 , MF_2 , ..., MF_n , es el vector MR que cierra el polígono de los vectores (3).

2º Valor de la resultante. — *Proyecciones de la resultante.* — Proyectemos la resultante R y sus componentes $F_1, \dots, F_i, \dots, F_n, \dots$, sobre tres ejes rectangulares de origen M .

Sean X, Y, Z , las proyecciones de la resultante sobre dichos ejes; $X_1, Y_1, Z_1; \dots, X_i, Y_i, Z_i; \dots, X_n, Y_n, Z_n$, las de las componentes. El teorema de las proyecciones de los vectores (6) da:

$$\begin{aligned} X &= X_1 + X_2 + \dots + X_n = \Sigma X_i, \\ Y &= Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n = \Sigma Y_i, \\ Z &= Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n = \Sigma Z_i. \end{aligned}$$

Ángulos de la resultante. — Sean α, β, γ los ángulos de la resultante con los ejes (fig. 90).

Se verifica:

$$\begin{aligned} X &= R \cos \alpha, \\ Y &= R \cos \beta, \\ Z &= R \cos \gamma; \end{aligned}$$

y

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2.$$

95. Descomposición de una fuerza. — **1º En dos fuerzas.** — Conforme se ha visto en la descomposición de los vectores (4), una fuerza R puede siempre descomponerse en dos fuerzas, aplicadas en el mismo punto y dirigidas según dos direcciones situadas en un mismo plano con la fuerza.

El problema se reduce a la construcción de un paralelogramo cuya diagonal y dirección de los lados se conocen.

2º En tres fuerzas. — Igualmente, una fuerza R puede siempre descomponerse en tres fuerzas, aplicadas en un mismo punto y dirigidas según tres direcciones cualesquiera trazadas desde dicho punto (4).

El problema se reduce a la construcción de un paralelepípedo, cuya diagonal y direcciones de las aristas se conocen.

96. Problemas sobre las fuerzas concurrentes. — **1º** ¿Cual es la intensidad de la resultante de dos fuerzas rectangulares de 6 y 8 kilogramos?

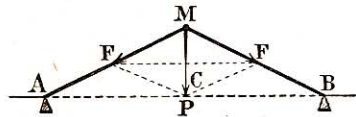
La fórmula $R^2 = F_1^2 + F_2^2$, da:

$$R^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100.$$

La intensidad de la resultante:

$$R = \sqrt{100} = 10 \text{ kg.}$$

2º Un cuchillo de armadura lleva una carga de 1000 kg; sus dimensiones están en la relación $\frac{MC}{AB} = \frac{1}{4}$. — Determinense los esfuerzos sobre los pares AM y BM .



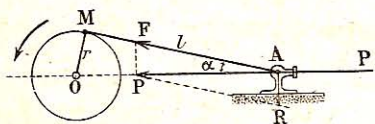
Tomemos la longitud MC como medida de la intensidad del peso P .

El paralelogramo de las fuerzas muestra que los esfuerzos iguales F , sobre los pares, se miden por $\frac{1}{2} MA = \frac{1}{2} MB$.

Ahora bien : $\overline{MA}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{MC}^2 = 5 \overline{MC}^2$;
de donde $\overline{MA} = \sqrt{5} \cdot \overline{MC}$.

El esfuerzo $F = \frac{\sqrt{5}}{2} P = \frac{\sqrt{5} \times 1000}{2} = 1118 \text{ kg}$.

3º *El vástago del émbolo de una máquina de vapor transmite un esfuerzo $P = 500 \text{ kg}$. ¿Cuáles son las intensidades de los esfuerzos sobre la biela y la deslizadera, cuando la manivela es perpendicular a la dirección de la biela?*



(Se tomará $l = 5r$.)

Tracemos el paralelogramo de las fuerzas. Los triángulos rectángulos OMA y FPA que tienen por ángulo común α , son semejantes.

Por consiguiente, la presión sobre la deslizadera

$$R = P \times \frac{r}{l} = \frac{P}{5} = 100 \text{ kg},$$

y el esfuerzo sobre la biela

$$F = \sqrt{P^2 + R^2} = \sqrt{500^2 + 100^2} = \sqrt{260000} = 510 \text{ kg}.$$

§ 3. — EQUILIBRIO DEL PUNTO MATERIAL

97. Equilibrio de un punto material libre. — 1º *Definición.* — Un punto *material libre* puede trasladarse en todas las direcciones. Sometido a la acción de varias fuerzas, sigue el movimiento que le imprime su resultante.

2º *Condiciones de equilibrio.* — *Para que un punto material libre esté en equilibrio, es preciso y suficiente que la resultante sea nula.*

En efecto, estando el punto en reposo, las fuerzas no le imprimen ningún movimiento: $\gamma = 0$. Así pues, su resultante $R = m\gamma$ es nula.

En tal caso se cierra el polígono de las fuerzas (94).

3º *Ecuaciones de equilibrio.* — Sean X, Y, Z, las proyecciones de la resultante R sobre tres ejes rectangulares.

Las condiciones de equilibrio son :

$$\begin{aligned} X &= \sum X_i = 0, \\ Y &= \sum Y_i = 0, \\ Z &= \sum Z_i = 0. \end{aligned}$$

98. Equilibrio de dos o tres fuerzas. — 1º *Dos fuerzas.* — Sean F_1 y F_2 las dos fuerzas que obran sobre un punto material. Para que el punto quede en equilibrio, es preciso y suficiente que *ambas fuerzas sean iguales y directamente opuestas.*

2º *Tres fuerzas.* — Sean F_1, F_2, F_3 , las tres fuerzas y R_1 la resul-

tante de las dos primeras. La condición de equilibrio es evidente: F_3 y R_1 han de ser iguales y directamente opuestas.

Así pues, *tres fuerzas concurrentes en equilibrio están en el mismo plano, y cada una de ellas es igual y directamente opuesta a la resultante de las otras dos.*

En virtud de la relación conocida (92) :

$$\frac{F_1}{\text{sen}(F_2, F_3)} = \frac{F_2}{\text{sen}(F_3, F_1)} = \frac{F_3}{\text{sen}(F_1, F_2)},$$

la intensidad de cada una de las fuerzas es proporcional al seno del ángulo formado por las otras dos.

Comprobación experimental ¹. — Un peso P está suspendido de dos puntos fijos A y B , por hilos (fig. 91). Los dinamómetros D_1 y D_2 miden la tensión de los hilos.

Las direcciones OA y OB , transportadas directamente sobre un papel, sirven para el trazado del paralelogramo de las fuerzas F_1 y F_2 , que tienen la misma intensidad que las tensiones.

Se comprueba que la diagonal representa una fuerza R_1 igual y directamente opuesta al peso P .

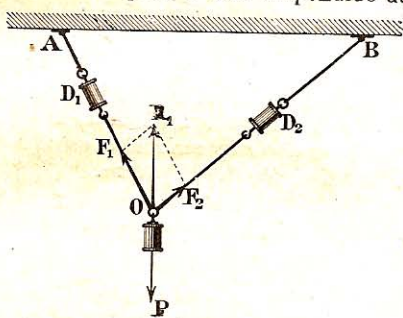


Fig. 91. — Comprobación experimental.

99. Equilibrio de un punto sobre una curva o sobre una superficie. — 1° **Definición.** — Un punto material *no está libre* si está sujeto a permanecer sobre una curva o sobre una superficie fijas.

Se dice en este caso que el punto está *enlazado*.

2° **Condiciones de equilibrio.** —

Para que un punto material esté en equilibrio sobre una curva o sobre una superficie pulimentada, es preciso y suficiente que la resultante de las fuerzas aplicadas en dicho punto sea normal a la curva o a la superficie.

La condición es necesaria, puesto que si la resultante R no es normal a la curva o a la superficie, se puede descomponer en dos fuerzas, una normal N y otra tangente, T (fig. 92).

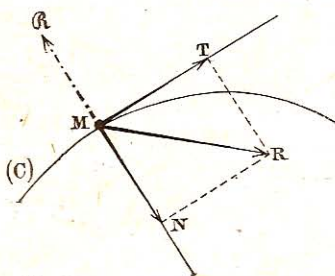


Fig. 92. — Equilibrio de un punto enlazado.

¹ Cf. BUVSE : *Méthodes américaines d'éducation technique.*

La fuerza N no puede arrastrar el punto M , pero la fuerza T lo pone en movimiento, y el equilibrio no existe.

La condición es *suficiente*, puesto que si la resultante es normal, el punto material, no pudiendo ser arrastrado en ningún sentido, queda en reposo.

Observación. — Cuando el punto está simplemente colocado sobre la curva o la superficie, no basta que la resultante sea normal; también debe aplicar el punto contra la curva o la superficie.

3º Presión y reacción. — La resultante normal R representa la presión del punto sobre la curva o sobre la superficie.

La fuerza R , directamente opuesta a R , es la *reacción* de la curva o de la superficie sobre el punto.

§ 4. — MOMENTOS DE LAS FUERZAS

100. Momento con relación a un punto. — **1º Definición.** — Se llama *momento lineal de una fuerza respecto de un punto*, el producto de la intensidad de esta fuerza por la distancia del punto a la dirección de la fuerza.

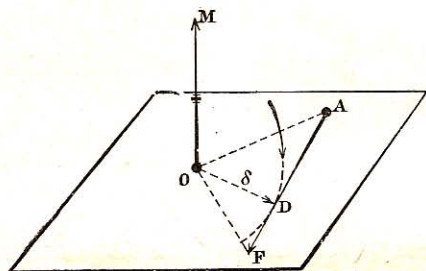


Fig. 93.

Vector del momento lineal de una fuerza.

2º Vector momento. — Sean AF el vector de una fuerza de intensidad F , y O el punto respecto del cual se toma el momento (fig. 93).

El momento lineal está representado por un vector OM , determinado por:

Su origen O , o centro de los momentos;

Su dirección, perpendicular al plano AOF ;

Su sentido, tal que un observador, con los pies en O y la cabeza en M , ve la fuerza girar en el sentido positivo (de su izquierda a su derecha) (32);

Su magnitud es el producto de la fuerza por su brazo de palanca $OD = \delta$:

$$\mathcal{M}. F. = \overline{AF} \times \overline{OD} = F \cdot \delta.$$

Esta magnitud mide el doble del área del triángulo OAF .

101. Teorema de Varignon*. — El momento lineal de la resultante de un sistema de fuerzas concurrentes, respecto de un punto, es igual a la suma geométrica de los momentos lineales de las componentes.

La demostración descansa sobre el teorema siguiente:

Teorema preliminar. — *El momento lineal de una fuerza AF respecto de un punto O es igual al momento lineal, respecto del mismo punto O, de la proyección de la fuerza sobre un plano perpendicular a OA y que contenga el punto A.*

Sean la fuerza AF, el centro de los momentos O, y el vector momento OM (fig. 94).

Proyectemos AF en A sobre el plano (P) perpendicular a OA y que contenga el punto A. El momento de esta proyección Af, respecto del mismo centro O, está también representado por OM.

En efecto, los triángulos OAF y OAf, que tienen una base común OA y alturas iguales $FH = fA$, son equivalentes; así pues los momentos lineales de AF y Af, respecto del punto O, son de misma magnitud (100).

Estos momentos tienen la misma dirección OM, perpendicular al plano OA/F, y el mismo sentido para el observador colocado con los pies en O y la cabeza en M.

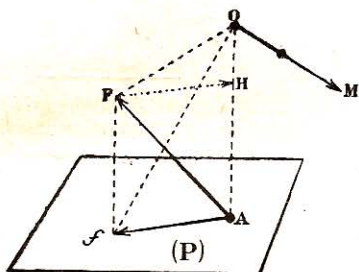


Fig. 94. Momento de la proyección de una fuerza.

A) Dos fuerzas. 1º Sean F_1 y F_2 dos fuerzas concurrentes y R su resultante, cuyos momentos lineales han de tomarse respecto del punto O cualquiera en el espacio (fig. 95).

Sobre el plano (P), perpendicular en A a la recta AO, proyectemos el paralelogramo de las fuerzas AF_1RF_2 ; esta proyección Af_1rf_2 , es un paralelogramo, el vector Ar es la suma geométrica de los vectores Af_1 y Af_2 .

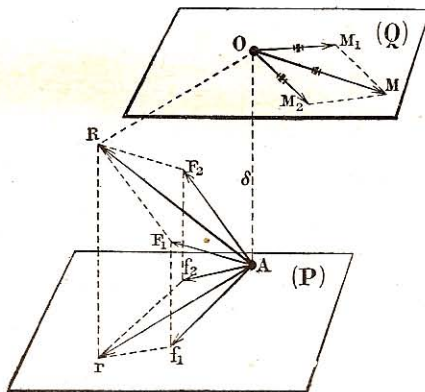


Fig. 95. — Momento de la resultante de dos fuerzas concurrentes.

Según el teorema preliminar :

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{M} \cdot R &= \mathcal{M} \cdot r = r \delta, \\ \mathcal{M} \cdot F_1 &= \mathcal{M} \cdot f_1 = f_1 \delta, \\ \mathcal{M} \cdot F_2 &= \mathcal{M} \cdot f_2 = f_2 \delta, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

siendo δ el brazo de palanca OA común a las tres fuerzas r, f_1, f_2 .

Estos momentos (1) están representados por los vectores OM, OM_1, OM_2 , respectivamente perpendiculares a los planos:

$$OA \cdot R, OA \cdot F_1, OA \cdot F_2.$$

Estos tres vectores están en el mismo plano (Q) perpendicular a la recta OA en el punto O.

2º Ahora bien, la figura OM_1MM_2 es un paralelogramo homotético de Af_1rf_2 , pues:

$$\frac{OM \text{ o } \partial n \cdot R}{Ar \text{ o } r} = \frac{OM_1}{Af_1} = \frac{OM_2}{Af_2} = \delta.$$

Así la diagonal OM es la suma geométrica de OM_1 y OM_2 :

$$(\partial n \cdot R) = (\partial n \cdot F_1) + (\partial n \cdot F_2),$$

teniendo en cuenta las relaciones (1).

B) Sistema de fuerzas. — Sean F_1, F_2, \dots, F_n , n fuerzas concurrentes y R su resultante, cuyos momentos lineales se toman, respecto de un punto O cualquiera en el espacio.

La demostración se prosigue como anteriormente, componiendo primero F_1 y F_2 en una resultante parcial R_1 , tal que:

$$(\partial n \cdot R_1) = (\partial n \cdot F_1) + (\partial n \cdot F_2);$$

luego R_1 y F_3 y así sucesivamente hasta F_n .

Se obtiene definitivamente:

$$(\partial n \cdot R) = (\partial n \cdot F_1) + (\partial n \cdot F_2) + \dots + (\partial n \cdot F_n).$$

C) Caso en que el punto O está en el plano de las fuerzas. — En este caso particular, el plano trazado por A, perpendicularmente a OA, corta el plano de las fuerzas según la dirección AH, perpendicular a OA (fig. 96).

Las proyecciones de las fuerzas sobre el plano perpendicular a OA son: AH para la resultante R, AH_1 y AH_2 para las componentes F_1 y F_2 ; su brazo de palanca común es OA.

Ahora bien, se tiene la igualdad algebraica:

$$AH = AH_1 + AH_2;$$

luego:

$$\partial n \cdot R = \partial n \cdot F_1 + \partial n \cdot F_2.$$

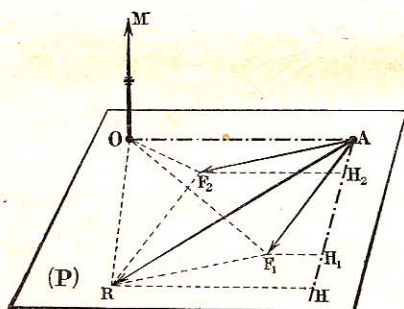


Fig. 96. — Momento de la resultante de dos fuerzas concurrentes.

1 Para mayor claridad, las líneas F_1O y F_2O no se han trazado en la fig. 95.

En tal caso el momento de la resultante es igual a la suma algebraica de los momentos de las componentes.

El teorema se extiende al caso de n fuerzas :

$$\mathcal{M}_{X'} \cdot R = \mathcal{M}_{X'} \cdot F_1 + \mathcal{M}_{X'} \cdot F_2 + \dots + \mathcal{M}_{X'} \cdot F_n.$$

102. Momento respecto de un eje. — **Definición.** — Se llama momento de una fuerza respecto de un eje, el momento lineal, respecto del pie del eje, de la proyección de la fuerza sobre un plano perpendicular al eje.

Sean $X'X$ un eje orientado, y (P) un plano perpendicular al eje ; el pie del eje sobre dicho plano es un punto O (fig. 97).

Proyectemos la fuerza dada F_1 en f_1 , sobre el plano (P).

El momento de F_1 , respecto del eje, tiene por magnitud :

$$\mathcal{M}_{X'X} \cdot F_1 = f_1 \cdot \delta_1.$$

Este momento está representado por un vector OM_a , trazado sobre el eje $X'X$ en un sentido tal que la fuerza f_1 gire en el sentido positivo (100).

El vector es positivo o negativo según está dirigido en el sentido positivo o negativo del eje orientado.

Teorema de Varignon. — El momento de la resultante de un sistema de fuerzas concurrentes, respecto de un eje, es igual a la suma algebraica de los momentos de las componentes.

1º Dos fuerzas. — Sean dos fuerzas concurrentes F_1 y F_2 , y su resultante R cuyos momentos se toman respecto del eje $X'X$ (fig. 97).

Proyectemos el paralelogramo de las fuerzas en af_1rf_2 sobre el plano (P) normal a $X'X$.

La diagonal ar es la resultante de las fuerzas proyectadas af_1 y af_2 .

Así pues $r\delta = f_1\delta_1 + f_2\delta_2$; δ , δ_1 , δ_2 , representan los brazos de la palanca de las fuerzas proyectadas ; es decir que :

$$\mathcal{M}_{X'X} \cdot R = \mathcal{M}_{X'X} \cdot F_1 + \mathcal{M}_{X'X} \cdot F_2.$$

2º Sistema de fuerzas. — El procedimiento conocido (101) permite escribir para n fuerzas F_1, F_2, \dots, F_n :

$$\mathcal{M}_{X'X} \cdot R = \mathcal{M}_{X'X} \cdot F_1 + \mathcal{M}_{X'X} \cdot F_2 + \dots + \mathcal{M}_{X'X} \cdot F_n.$$

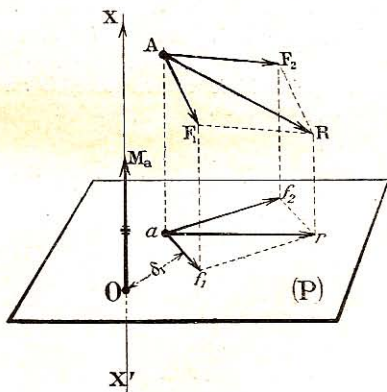


Fig. 97.
Momento, respecto de un eje,
de la resultante de dos fuerzas.

CAPÍTULO II

ESTÁTICA DEL CUERPO SÓLIDO

SUMARIO :

§ 1. *Fuerzas paralelas. Pares* : Composición de fuerzas paralelas. Centro de fuerzas. — Descomposición de fuerzas. — Momento respecto de un punto. — Pares de fuerzas paralelas.

§ 2. *Reducción de fuerzas cualesquiera* : Sistema de fuerzas equivalentes. — Reducción a una fuerza y a un par. Reducción a dos fuerzas.

§ 3. *Equilibrio de un cuerpo sólido* : Sólido enlazado con un punto, un eje o un plano fijos.

§ 1. — FUERZAS PARALELAS. — PARES

I. — Composición de fuerzas.

103. Axioma de reducción de las fuerzas. — Las fuerzas exteriores aplicadas a un cuerpo sólido pueden dividirse en dos categorías :

1º Las *fuerzas paralelas* ;

2º Las *fuerzas de dirección cualquiera*.

Las primeras tienen en general una resultante única ; las segundas no pueden, por lo común, reducirse a una sola fuerza, pero es siempre posible reducirlas a dos (119).

Axioma de reducción de las fuerzas. — La reducción de las fuerzas se simplifica por el axioma siguiente :

Dos fuerzas iguales y directamente opuestas, aplicadas a un mismo punto material o en dos puntos de un cuerpo sólido, se equilibran.

Dedúcese de este axioma que se puede:

1º *Agregar* o *suprimir* ambas fuerzas, sin modificar el equilibrio o el movimiento del cuerpo;

2º *Trasladar el punto de aplicación de una fuerza* a un punto cualquiera de su dirección, quedando el punto invariablemente unido con el primero.

En efecto, sea una fuerza P que se desea trasladar en su propia dirección de A a A' , estando el punto A invariablemente unido con el cuerpo (fig. 98). Apliquemos en A' dos fuerzas $-P'$ y $+P'$, iguales a P y directamente opuestas. Se pueden suprimir las fuerzas $+P$ y $-P'$ en virtud del axioma, y queda la fuerza $+P'$, igual a la primera, $+P$, y de igual sentido.

104. Composición de dos fuerzas paralelas y de igual sentido. — Teorema. — 1º *La resultante de dos fuerzas paralelas y del mismo sentido aplicadas en dos puntos de un cuerpo sólido, es paralela a estas fuerzas, del mismo sentido e igual a su suma.*

2º *Su punto de aplicación divide la recta que une los puntos de aplicación de las componentes, en dos segmentos inversamente proporcionales a las intensidades de las componentes.*

Sean F_1 y F_2 dos fuerzas paralelas del mismo sentido, aplicadas a los puntos A y B de un cuerpo sólido (S) (fig. 99).

1º Estas fuerzas tienen una resultante paralela, igual a su suma.

En los puntos A y B , apliquemos, en la dirección AB , dos fuerzas P_1 y P_2 , de magnitud arbitraria, pero iguales y de sentidos contrarios. En virtud del axioma de reducción, el estado del sistema no cambia.

Las fuerzas F_1 y P_1 , F_2 y P_2 tienen respectivamente Q_1 y Q_2 por resultantes. Traslademos Q_1 y Q_2 a

Q'_1 y Q'_2 , en su punto de concurso C' , estando este último punto invariablemente unido al sólido, y luego descompongamos Q'_1 y Q'_2 en sus dos componentes respectivas F'_1 , P'_1 y F'_2 , P'_2 .



Fig. 98. Transporte de una fuerza en su propia dirección.

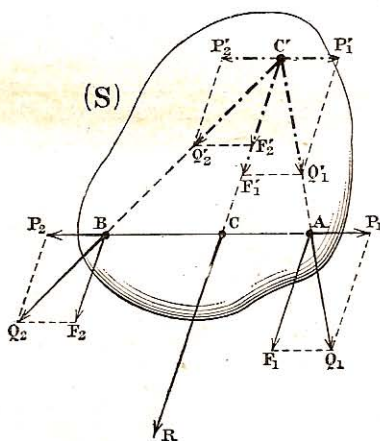


Fig. 99. — Composición de dos fuerzas paralelas de igual sentido.

Las fuerzas P'_1 y P'_2 , iguales a P_1 y P_2 se equilibran; el sistema dado se reduce a las fuerzas F'_1 y F'_2 , dirigidas en el mismo sentido. Su resultante R es la del sistema. Esta resultante es única, paralela a las componentes F_1 y F_2 , del mismo sentido que éstas e igual a su suma.

$$R = F'_1 + F'_2 = F_1 + F_2.$$

2º Determinemos la posición del punto de aplicación C de esta resultante ¹ o *centro de dos fuerzas paralelas*, sobre la recta AB . Los dos triángulos semejantes ACC' y $Q'_1F'_1C'$ dan:

$$\frac{AC}{Q'_1F'_1 \text{ o } P_1} = \frac{CC'}{F_1} \quad (1)$$

asimismo:
$$\frac{BC}{P_2} = \frac{CC'}{F_2} \quad (2)$$

Dividiendo (1) y (2) miembro a miembro, teniendo en cuenta que: $P_1 = P_2$, resulta:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{F_2}{F_1} \quad (3)$$

Observación. — La relación (3) puede escribirse:

$$\frac{F_1}{BC} = \frac{F_2}{AC} = \frac{F_1 + F_2}{AC + BC} = \frac{R}{AB};$$

la relación de cada fuerza a la distancia de los puntos de aplicación de las otras dos es constante.

105. Composición de dos fuerzas paralelas, desiguales y de sentido contrario. — **Teorema.** — 1º *La resultante de dos fuerzas paralelas, desiguales y de sentido contrario, es paralela a estas fuerzas, en el sentido de la mayor, e igual a su diferencia.*

2º *Su punto de aplicación está en la prolongación de la recta que une los puntos de aplicación de las componentes, del lado de la mayor; sus distancias a los puntos de aplicación son inversamente proporcionales a las intensidades de las componentes.*

Sean F_1 y $-F_2$ dos fuerzas paralelas y de sentidos contrarios, aplicadas en los puntos A y B de un cuerpo sólido (S); son desiguales y $F_1 > F_2$ (fig. 100).

1º Estas componentes tienen una resultante paralela, igual a su diferencia.

Se puede reemplazar la fuerza F_1 por dos fuerzas paralelas, del

¹ En rigor solo queda determinada la dirección CC' de la resultante, pero se elige el punto C en que dicha dirección encuentra la recta AB que une los puntos de aplicación de las componentes, como punto de aplicación más conveniente. Se le llama *centro de dos fuerzas paralelas*.

mismo sentido y de intensidades F_2 y $(F_1 - F_2)$. La primera F_2 se aplica en el punto B; la otra $F_1 - F_2$ en un punto C, sobre la prolongación de BA, tal que :

$$\frac{AC}{BA} = \frac{F_2}{F_1 - F_2} \quad (1)$$

El sistema se compone pues de tres fuerzas : $-F_2$ y F_2 en el punto B, y $(F_1 - F_2)$ en el punto C.

Ahora bien, las dos primeras anulando su acción, no queda más que la fuerza $F_1 - F_2 = R$, resultante del sistema. Esta resultante es única, paralela a las componentes F_1 y F_2 , en el sentido de la mayor F_1 , e igual a su diferencia :

$$R = F_1 - F_2.$$

2º La posición del punto de aplicación C o *centro de las dos fuerzas paralelas*, es dada por la relación (1) que se escribe :

$$\frac{AC}{AB + AC} = \frac{F_2}{F_1 - F_2 + F_2},$$

$$\frac{AC}{BC} = \frac{F_2}{F_1}.$$

Observación. — La relación (2) da :

$$\frac{F_1}{BC} = \frac{F_2}{AC} = \frac{F_1 - F_2}{BC - AC} = \frac{R}{AB}, \quad (3)$$

como para las fuerzas de igual sentido.

Par de fuerzas. — Cuando $F_1 = F_2$, la resultante es nula.

Se dice que las dos fuerzas forman un *par* (113). Un par no puede equilibrarse con una fuerza única, sino con otro par.

106. Composición de un sistema de fuerzas paralelas. Centro de fuerzas paralelas. — Teorema. — 1º *La resultante de un sistema de fuerzas paralelas, aplicadas a un cuerpo sólido, es paralela a estas fuerzas e igual a su suma algebraica.*

2º *Su punto de aplicación, llamado centro de las fuerzas paralelas, es independiente de la dirección común de las fuerzas.*

Sean las n fuerzas F_1, F_2, \dots, F_n , cuya suma algebraica es diferente de cero (fig. 101).

Pueden presentarse dos casos :

A) **Todas las fuerzas son del mismo sentido.** — Compongamos dos

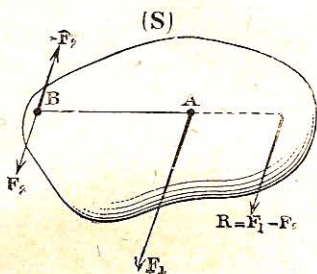


Fig. 100.
Composición de dos fuerzas paralelas (de sentidos contrarios).

fuerzas F_1 y F_2 en una resultante $R_1 = F_1 + F_2$, aplicada en el centro C_1 de las fuerzas y luego R_1 con F_3 , en una nueva resultante parcial:

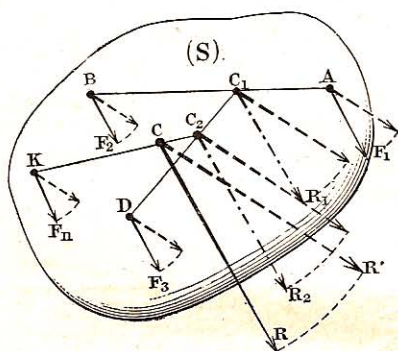


Fig. 101.

Centro de un sistema de fuerzas paralelas.

$R_2 = R_1 + F_3 = F_1 + F_2 + F_3$, aplicada en el centro C_2 de las fuerzas R_1 y F_3 ; y así sucesivamente, hasta la última fuerza F_n .

La resultante final R es única, reemplaza las n fuerzas dadas:

$$R = F_1 + F_2 + \dots + F_n,$$

y su punto de aplicación C es el centro de las fuerzas paralelas.

B) Las fuerzas son de sentido contrario. — En este caso compongamos primero las fuerzas del mismo

sentido en una sola, P' , de centro C' , y luego las del otro sentido en una sola, P'' , de centro C'' ; por último P' y P'' en una resultante única:

$$R = F_1 + F_2 + \dots + F_n,$$

igual a la suma algebraica de las fuerzas dadas, y aplicada en el centro C de las n fuerzas paralelas.

Así pues la resultante es paralela a las fuerzas e igual a su suma algebraica.

Además, el centro C no cambia cuando las fuerzas giran alrededor de sus puntos de aplicación respectivos, manteniéndose paralelas. Por último, los puntos de aplicación C_1, C_2, \dots de las resultantes parciales R_1, R_2, \dots , no cambian de posición; lo mismo sucederá con el centro C de las fuerzas paralelas.

Así pues, el centro de fuerzas paralelas es independiente de la dirección común de las fuerzas.

II. — Descomposición de fuerzas.

107. Descomposición de una fuerza en dos fuerzas paralelas. — 1º Fuerzas de igual sentido. — Descomponer una fuerza R en dos fuerzas paralelas, F_1 y F_2 , aplicadas en dos puntos dados A y B .

De las relaciones:
$$\frac{F_1}{BC} = \frac{F_2}{AC} = \frac{R}{AB},$$

se deduce :

$$\left. \begin{aligned} R &= F_1 + F_2, \\ F_1 &= R \times \frac{BC}{AB}, \\ F_2 &= R \times \frac{AC}{AB}. \end{aligned} \right\}$$

2º Fuerzas de sentidos contrarios. — Problema análogo.

Se verifica :

$$\left. \begin{aligned} R &= F_1 - F_2, \\ F_1 &= R \times \frac{BC}{AB}, \\ F_2 &= R \times \frac{AC}{AB}. \end{aligned} \right\}$$

108. Descomposición de una fuerza en un sistema de fuerzas paralelas. — 1º Tres componentes. — *Descomponer una fuerza R en tres fuerzas paralelas aplicadas en tres puntos dados A, B, D.*

La fuerza R encuentra el plano ABD en el punto C. Puede ser descompuesta en dos fuerzas F_1 y P, aplicadas en A y E; la fuerza P da, a su vez, otras dos componentes F_2 y F_3 , aplicadas en B y D (fig. 102).

El problema admite sólo una solución.

La relación entre cada fuerza y el área del triángulo que tiene por vértices los puntos de aplicación de las otras tres fuerzas, es constante.

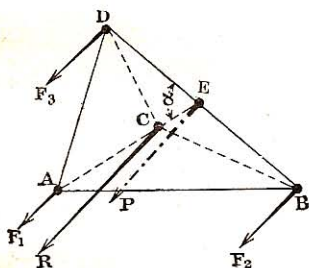


Fig. 102.

Descomposición en tres fuerzas paralelas.

En efecto, se verifica :

$$\frac{F_1}{CE} = \frac{R}{AE},$$

$$o \quad \frac{F_1}{\text{superf. CBD}} = \frac{R}{\text{superf. ABD}};$$

pues estos dos triángulos tienen BD como base común, y sus alturas son proporcionales a CE y AE.

Se obtendría del mismo modo :

$$\frac{F_1}{\text{superf. CBD}} = \frac{F_2}{\text{superf. CAD}} = \frac{F_3}{\text{superf. CAB}} = \frac{R}{\text{superf. ABD}}.$$

2º Sistema de fuerzas. — Supongamos que se trate de descomponer la fuerza R en n componentes, cuyos puntos de aplicación sean conocidos.

En general, el problema está indeterminado cuando $n > 3$.

En efecto, sean A, B, D, los orígenes de tres de las componentes (fig. 103); E y C los puntos en que las direcciones de la cuarta componente y de la fuerza dada R cortan el plano ABD.

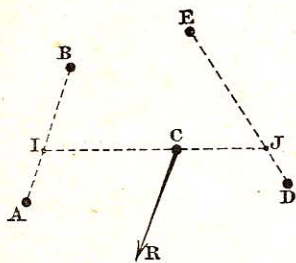
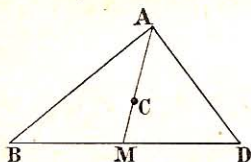


Fig. 103.

Descomposición de una fuerza en un sistema de fuerzas paralelas.

109. Problema sobre las fuerzas paralelas. — 1º *Tres fuerzas iguales, paralelas y del mismo sentido, están aplicadas en los vértices de un triángulo ABD. — Determinar el centro C de dichas fuerzas.*



Las dos fuerzas F, aplicadas en B y D, tienen una resultante parcial 2F, aplicada en M, punto medio de BD. Esta resultante y la fuerza en A, dan la resultante total 3F. El centro C es tal que :

$$\frac{AC}{2} = \frac{AM}{3} \quad \text{o} \quad \overline{AC} = \frac{2}{3} AM.$$

El centro es pues el punto de intersección de las medianas del triángulo ABD.

2º *Una polea de 300 kilogramos está instalada en falso, en el extremo de un árbol que descansa sobre dos soportes A y B separados 1m,20; la polea está a 0m,30 de A. — ¿Cuáles son las presiones sobre los soportes?*

Sea C el punto de aplicación del peso de la polea.

$$\text{Se verifica: } F_1 = R \times \frac{BC}{AB}, \quad \text{o} \quad F_1 = 300\text{kg} \times \frac{1,50}{1,20} = 375\text{kg},$$

$$\text{y} \quad F_2 = R \times \frac{AC}{AB}, \quad \text{o} \quad F_2 = 300\text{kg} \times \frac{0,30}{1,20} = 75\text{kg}.$$

El soporte B tiende a levantarse.

III. — Momentos. — Centro de fuerzas paralelas.

110. Momento de una fuerza respecto de un plano. — 1º *Definición.* — *Se llama momento de una fuerza respecto de un plano, el producto de la intensidad de esta fuerza por la distancia de su punto de aplicación al plano.*

Sólo se aplica a vectores localizados en un punto, como, por ejemplo, los pesos de los diferentes elementos que constituyen un cuerpo.

Sean AF el vector de una fuerza de intensidad F, y $Aa = \delta$, la distancia de su punto de aplicación A al plano (P), respecto del cual se

ha de tomar el momento de la fuerza (fig. 104). La distancia Aa se llama *acotación* del punto de aplicación A, o *brazo de palanca* del momento.

La *magnitud* de este momento es:

$$\mathcal{M}_P. F = F \cdot \delta.$$

Los momentos respecto de los planos se toman en el caso de fuerzas paralelas, para determinar el centro de dichas fuerzas.

2º **Signos.** — No se representan por vectores. Se admiten las convenciones siguientes: Momento de una fuerza respecto de un plano. *acerca de los signos.*

1º Para las *fuerzas* se elige un sentido positivo, las de sentido contrario son negativas.

2º Para la *acotación* de los puntos de aplicación, las acotaciones situadas a un lado determinado del plano son positivas, y las otras negativas.

Por consiguiente, el *momento* de una fuerza es *positivo*, cuando la fuerza y su *acotación* son ambas positivas o negativas.

111. Teorema de Varignon. — *El momento de la resultante de un sistema de fuerzas paralelas, respecto de un plano, es igual a la suma algebraica de los momentos de las componentes.*

A) Dos fuerzas. — 1º *De igual sentido.*

Sean F_1 y F_2 dos fuerzas paralelas de igual sentido y R su resultante: $R = F_1 + F_2$ (fig. 105).

El plano de los momentos es (P); los brazos de palanca $\delta_1, \delta_2, \delta$, son las acotaciones positivas de los puntos de aplicación de las fuerzas.

Es preciso establecer que: $\mathcal{M}_P. R = \mathcal{M}_P. F_1 + \mathcal{M}_P. F_2$, o bien:

$$R\delta = F_1\delta_1 + F_2\delta_2.$$

En efecto, por el punto C, tracemos $A'B'$ paralelo a ab ; los triángulos semejantes CAA' y CBB' dan:

$$\frac{AA'}{BB'} = \frac{AC}{BC} = \frac{F_2}{F_1}.$$

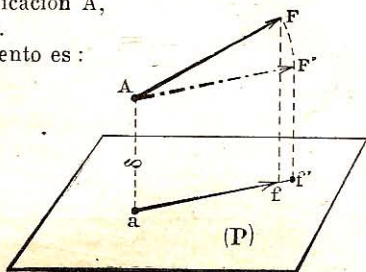


Fig. 104.

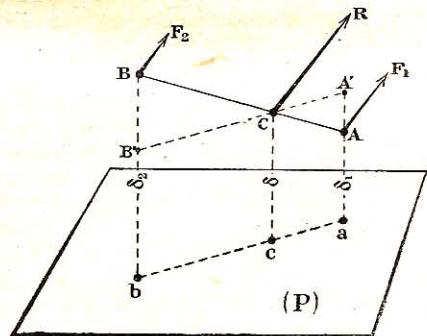


Fig. 105.

Momento de la resultante de dos fuerzas paralelas. (Componentes sobre el plano.)

Así pues :
$$\frac{AA' \text{ o } \delta - \delta_1}{BB' \text{ o } \delta_2 - \delta} = \frac{F_2}{F_1}.$$

De donde :
$$R\delta = (F_1 + F_2)\delta = F_1\delta_1 + F_2\delta_2.$$

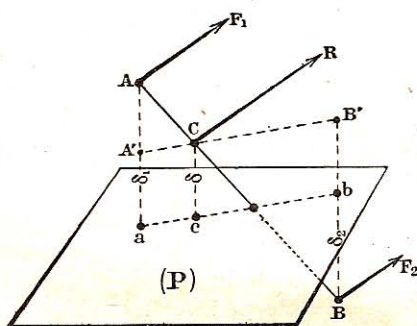


Fig. 106.

Momento de la resultante de dos fuerzas paralelas.
(Una componente está debajo del plano.)

2º Desentidos contrarios :

$$R = F_1 - F_2$$

(con $F_1 > F_2$).

Una demostración análoga daría :

$$R\delta = (F_1 - F_2)\delta = F_1\delta_1 - F_2\delta_2.$$

3º Las fuerzas están de ambos lados del plano. — En dicho caso la acotación δ_2 es negativa (fig. 106).

Los dos triángulos semejantes CAA' y CBB' dan :

$$\frac{AA' \text{ o } \delta_1 - \delta}{BB' \text{ o } \delta - \delta_2} = \frac{AC}{BC} = \frac{F_2}{F_1}.$$

De donde :
$$R\delta = (F_1 + F_2)\delta = F_1\delta_1 + F_2\delta_2.$$

B) Sistema de fuerzas. — Por un razonamiento conocido (101):

$$\mathcal{M}_P. R = \mathcal{M}_P. F_1 + \mathcal{M}_P. F_2 + \dots + \mathcal{M}_P. F_n.$$

112. Coordenadas del centro de fuerzas paralelas.

— Para determinar el centro C de un sistema de fuerzas paralelas, calculemos distancias x, y, z , a los planos de tres ejes de coordenadas $Oxyz$ (fig. 107).

Sean F_1, F_2, \dots, F_n , las n fuerzas y R su resultante.

Llamemos :

x, y, z , las coordenadas del centro C de las fuerzas paralelas ;

x_1, y_1, z_1 , las coordenadas del punto de aplicación A de la fuerza F_1 ;

x_i, y_i, z_i , las coordenadas del punto de aplicación A_i de la fuerza F_i ;

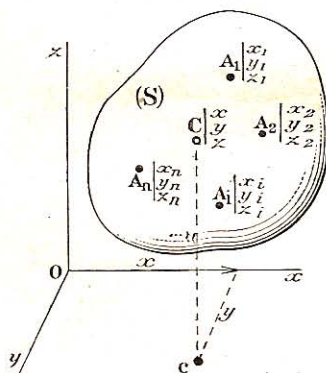


Fig. 107. — Coordenadas del centro de fuerzas paralelas.

x_n, y_n, z_n , las coordenadas del punto de aplicación A_n de la fuerza F_n . El teorema de Varignon da :

$$\begin{aligned} \text{Respecto del plano } yOz: R_x &= F_1 x_1 + F_2 x_2 + \dots + F_n x_n = \Sigma F_i x_i; \\ \text{— — } zOx: R_y &= F_1 y_1 + F_2 y_2 + \dots + F_n y_n = \Sigma F_i y_i; \\ \text{— — } xOy: R_z &= F_1 z_1 + F_2 z_2 + \dots + F_n z_n = \Sigma F_i z_i. \end{aligned}$$

$$\text{De donde: } \left. \begin{aligned} x &= \frac{\Sigma F_i x_i}{\Sigma F_i}, & y &= \frac{\Sigma F_i y_i}{\Sigma F_i}, & z &= \frac{\Sigma F_i z_i}{\Sigma F_i}, \\ \text{porque } R &= F_1 + F_2 + \dots + F_n = \Sigma F_i. \end{aligned} \right\}$$

IV. — Pares de fuerzas.

113. Eje de un par de fuerzas. — 1º *Definición.* — *Se llama par un sistema de fuerzas P — P₁, iguales, paralelas y de sentido contrario, aplicadas a un sólido (fig. 108).*

El *brazo de palanca del par* es la distancia *p* de las fuerzas paralelas; el *momento del par* es el producto $P \times p$; mide el área del paralelogramo construido sobre las dos fuerzas del par.

2º *Eje de un par.* — *Se llama eje de un par la resultante de los momentos de dos fuerzas o momento resultante, respecto de un punto cualquiera del espacio.*

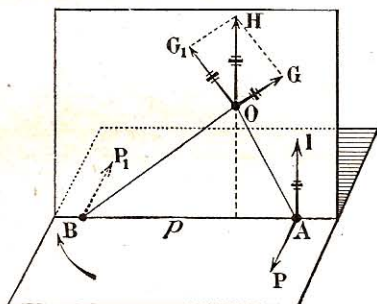


Fig. 108. — Eje de un par de fuerzas.

El eje está representado por un *vector constante* en dirección, sentido y magnitud, pero no en posición; su origen puede ser un punto cualquiera.

Los pares gozan, en efecto, de la propiedad siguiente :

Teorema. — *El momento resultante de un par respecto de un punto cualquiera O, es constante en dirección, sentido y magnitud.*

Sea el par de fuerzas P — P₁. Las perpendiculares OA y OB, bajadas del punto O sobre las direcciones de las fuerzas, pertenecen a un plano perpendicular al plano del par (fig. 108). Los vectores momentos OG y OG₁ de las fuerzas P y P₁ respecto del punto O, están en el plano OAB, y son respectivamente perpendiculares a las rectas OA y OB.

Su suma geométrica OH es el momento resultante del par respecto del punto O. Este vector es constante.

Designemos, en efecto, por P la magnitud común a los dos vectores de las fuerzas; los momentos componentes tienen por magnitud :

$$\overline{OG} = P \times \overline{OA} \quad \text{y} \quad \overline{OG}_1 = P \times \overline{OB}.$$

Los triángulos OGH y AOB son semejantes y sus lados son respectivamente perpendiculares.

El vector OH es pues perpendicular a AB y de magnitud :

$$\overline{OH} = P \times \overline{AB} = P \times p.$$

Así pues, el momento resultante del par en un punto cualquiera, es perpendicular al plano del par, de sentido positivo respecto de las dos fuerzas, e igual al momento del par.

3º Vector eje. — El origen del vector eje está indeterminado. Se elige generalmente por origen un punto particular A sobre una de las fuerzas P. El vector eje AI, equipolente a OH, es perpendicular al plano del par, y está dirigido en un sentido tal que la fuerza P_1 gire alrededor de A en el sentido positivo (100).

114. Pares equivalentes. — En un plano paralelo al plano del par $P - P_1$, consideremos un par $P' - P'_1$, que tenga un momento resultante igual y de mismo sentido.

Los dos pares son equivalentes, y están representados por el mismo vector eje, puesto que, para todo punto del espacio, tienen igual momento resultante.

Se puede siempre reemplazar un par por otro equivalente, situado en el mismo plano o en un plano paralelo.

115. Composición de pares. — *Un sistema de pares se compone en un par único cuyo eje es la suma geométrica de los ejes de los pares componentes.*

Elijamos un punto cualquiera O, como origen común de los vectores ejes de los pares dados.

Estos ejes OI_1, OI_2, \dots, OI_n , tienen una resultante OI que es la suma geométrica de los ejes componentes :

$$(OI) = (OI_1) + (OI_2) + \dots + (OI_n).$$

En el caso particular en que *los pares están en planos paralelos*, los vectores ejes, de origen común O y llevados por una misma recta, tienen una resultante que es la *suma algebraica* de los ejes componentes.

§ 2. — REDUCCIÓN DE FUERZAS CUALESQUIERA

116. Resultante general y momento resultante. — Sea un sólido (S) sometido a la acción de fuerzas cualesquiera F_1, F_2, \dots, F_n , cuyos puntos de aplicación son A_1, A_2, \dots, A_n (fig. 109).

1º En un punto cualquiera O del sólido, apliquemos fuerzas equipolentes a las fuerzas dadas, y construyamos su suma geométrica OR.

Por definición, este vector es la *resultante general de las fuerzas dadas, en el punto O*.

2º Tomemos los momentos lineales de las fuerzas respecto del punto O, y construyamos su suma geométrica OI.

Por definición, este vector es el *momento resultante de las fuerzas dadas, en el punto O*.

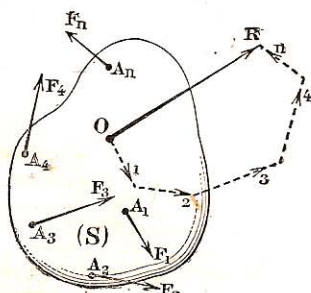


Fig. 109.
Resultante de traslación de un sistema de fuerzas.

117. Sistema de fuerzas equivalentes. — 1º *Definición.*

— Se dice que dos sistemas de fuerzas son equivalentes, cuando tienen la misma resultante general y el mismo momento resultante en un punto O.

Por ejemplo, dos pares de igual eje son equivalentes (114); pues cada resultante general, formada por dos fuerzas iguales y opuestas, es nula, y cada momento resultante está representado por el mismo vector eje.

En cambio, un par no puede ser equilibrado por una fuerza única, pues no se trata de sistemas equivalentes: únicamente la resultante general del par es nula; el momento resultante del par es constante, mientras que el de la fuerza es variable con el punto O elegido.

2º **Propiedad fundamental.** — No se modifica el estado de reposo ni de movimiento de un cuerpo sólido cuando se sustituyen uno a otro dos sistemas de fuerzas equivalentes.

118. Traslado de una fuerza. — En un cuerpo sólido se puede siempre trasladar una fuerza paralelamente a sí misma, en un punto O del cuerpo, a condición de añadir un par cuyo eje es el momento lineal de la fuerza respecto de O.

Sea la fuerza F la que se trata de trasladar paralelamente a sí misma al punto O (fig. 110).

En dicho punto apliquemos dos fuerzas F_1 y F' , iguales y paralelas a F y directamente opuestas. El equilibrio o el movimiento del cuerpo no se habrá modificado.

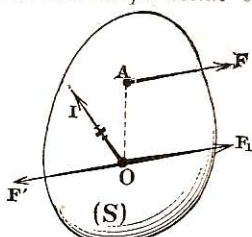


Fig. 110.
Traslado de una fuerza paralelamente a sí misma.

Ahora bien, la fuerza F está reemplazada por un sistema equivalente formado :

- 1º Por la fuerza F_1 , que es F trasladada da paralelamente;
- 2º Por el par $F - F_1$, cuyo eje OI es perpendicular al plano FAO y cuya magnitud es el momento de F respecto de O .

Recíprocamente. — El sistema, compuesto de una fuerza F_1 y de un par cuyo eje OI es perpendicular a F_1 , puede reemplazarse por una fuerza única F , equipolente a F_1 .

Se dice también que el sistema se reduce a la fuerza F .

119. Reducción de las fuerzas aplicadas a un sólido.

— Un sistema de fuerzas cualesquiera aplicadas a un cuerpo sólido puede reducirse a dos fuerzas no situadas en el mismo plano, pasando una de ellas por un punto elegido arbitrariamente.

1º Reducción a una fuerza y un par. — Sea un sólido (S) sometido a la acción de un sistema de n fuerzas F_1, F_2, \dots, F_n (fig. 111).

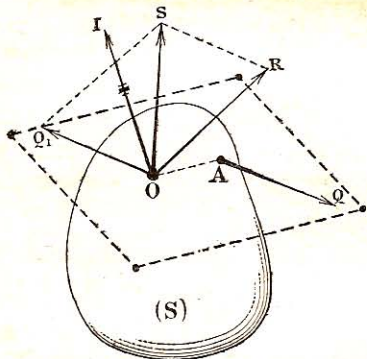


Fig. 111.
Reducción de un sistema de fuerzas.

Traslademos a un punto cualquiera O del sólido cada una de las fuerzas, agregándole el par necesario.

Después del traslado, habrá en el punto O :

1º n fuerzas equipolentes a las fuerzas dadas, y cuya resultante es R ;

2º n ejes de pares OI_1, OI_2, \dots, OI_n , resultante es OI .

Así pues el sistema dado se reduce a la resultante de traslación R y al par resultante

$Q - Q_1$, cuyo eje OI tiene por magnitud el momento resultante de las fuerzas respecto del punto O .

2º Reducción a dos fuerzas. — Traslademos el par $Q - Q_1$, en su plano, de modo que una de las fuerzas, Q_1 , por ejemplo, tenga su punto de aplicación en O .

Las fuerzas R y Q_1 dan una resultante S aplicada en O . El sistema dado se reduce definitivamente a las dos fuerzas S y Q cuyos puntos de aplicación son O y A .

Ahora bien, el punto O se elige arbitrariamente, y las dos fuerzas no están en general en el mismo plano, pues sólo Q se encuentra en el plano del par.

Así pues queda establecido el teorema.

Casos particulares. — 1º *Resultante única* : Cuando la *resultante* de traslación R está en el plano del par, es decir es perpendicular al eje OI del par resultante, las tres fuerzas R , Q , Q_1 , están en el mismo plano y dan una resultante única.

2º *Par único* : Las fuerzas aplicadas al sólido se reducen a un par cuando la resultante de traslación R es nula.

La condición es evidentemente necesaria y suficiente.

3º Un sistema de fuerzas cuya resultante de traslación y par resultante son nulos, es un *sistema equivalente a cero*.

§ 3. — EQUILIBRIO DE UN CUERPO SÓLIDO

120. Equilibrio de un sólido libre. — Un sólido es libre cuando cada uno de sus puntos materiales está libre (97).

Un sólido está *entlazado* cuando algunos de sus puntos están sujetos a enlaces (99).

Equilibrio. — Para que un sólido libre esté en equilibrio, bajo la acción de un sistema de fuerzas cualesquiera, es preciso y suficiente que el sistema sea equivalente a cero.

1º *Condición necesaria.* — Supongamos que el cuerpo (S) pueda estar en equilibrio por la acción de una resultante R y de un par $Q - Q_1$ (fig. 112), a los que queda reducido el sistema de las fuerzas.

El equilibrio debería subsistir si se fijara el punto O ; entonces la acción de las fuerzas R y Q_1 , sería destruida por la fijeza de dicho punto. Pero el equilibrio no es posible en estas condiciones, pues la fuerza resultante Q haría girar el cuerpo alrededor del punto O .

Es pues preciso que $Q = 0$, es decir que el par sea nulo.

Queda la resultante R , que ha de ser también nula para que el sólido esté en equilibrio.

2º *Condición suficiente.* — Porque, si la resultante de traslación y el par resultante son nulos, sucede, desde el punto de vista del equilibrio, como si el cuerpo no estuviese sometido a la acción de ninguna fuerza. Queda pues en reposo.

121. Equilibrio de un sólido que tiene un punto fijo. — El cuerpo sólido (S), por este enlace (120), tiene sólo un movimiento posible : una rotación alrededor del punto fijo O (fig. 113).

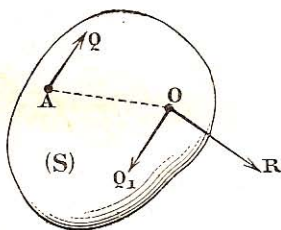


Fig. 112.
Equilibrio de un sólido libre.
(Resultante y par resultante nulos.)

Equilibrio. — La condición necesaria y suficiente, para que un sólido móvil alrededor de un punto fijo esté en equilibrio, es que el sistema de las fuerzas aplicadas al cuerpo tenga una resultante única que pase por el punto fijo.

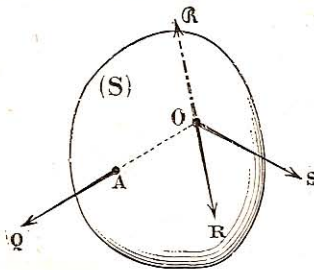


Fig. 113.
Equilibrio de un sólido que tiene un punto fijo.

1º Condición necesaria. — En efecto, todas las fuerzas aplicadas al sólido pueden reducirse a dos fuerzas Q y S . Elijamos O como punto arbitrario por donde pasa la fuerza S . La segunda fuerza Q ha de encontrar también este punto; de otro modo giraría el cuerpo alrededor de O .

2º Condición suficiente. — Si se cumple esta condición, transportemos a O el punto A de aplicación de la fuerza Q ; no cambia nada el estado del sistema. Las fuerzas se componen en una fuerza resultante R que, destruida por la fijeza del punto O , no puede alterar el equilibrio.

Presión y reacción. — El punto fijo O está sometido a una presión por parte de la resultante única R ; en cambio el punto ejerce sobre el cuerpo una reacción \mathcal{R} igual y directamente opuesta.

El cuerpo es un sólido libre en equilibrio, si a las fuerzas aplicadas se agrega la reacción \mathcal{R} del punto fijo O . La reacción es una fuerza de enlace que reemplaza el enlace del cuerpo con el punto fijo.

122. Equilibrio de un sólido que tiene un eje fijo. —

El cuerpo sólido (S) sino un solo movimiento posible: la rotación alrededor del eje fijo Δ (fig. 114).

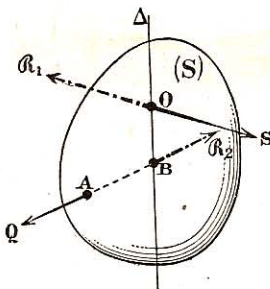


Fig. 114.
Equilibrio de un sólido que tiene un eje fijo.

Equilibrio. — La condición necesaria y suficiente para que un sólido móvil alrededor de un eje fijo esté en equilibrio, es que el sistema de las fuerzas aplicadas al cuerpo se reduzca a dos fuerzas que encuentren el eje fijo.

1º Condición necesaria. — Todas las fuerzas se reducen a dos, S y Q . El punto arbitrario O , punto de aplicación de la fuerza S , se elige sobre el eje fijo Δ .

La fuerza Q debe también encontrar el eje, sino el cuerpo giraría alrededor de Δ .

2º Condición suficiente. — Si se cumple esta condición, traslademos el punto A de aplicación de Q , a B sobre el eje. No se cambia

el estado del sistema. El equilibrio subsiste porque la fijeza del eje destruye el efecto de las fuerzas.

Presiones y reacciones. — El eje Δ está sometido en O y en B a las dos presiones de las fuerzas S y Q. En cambio ejerce sobre el cuerpo dos reacciones: una \mathcal{R}_1 en O, la otra \mathcal{R}_2 en B, iguales y directamente opuestas a S y a Q.

El cuerpo es un sólido libre en equilibrio, si a las fuerzas directamente aplicadas se suman las dos fuerzas de enlace \mathcal{R}_1 y \mathcal{R}_2 .

123. Equilibrio de un sólido que descansa sobre un plano pulimentado fijo. — **Polígono de apoyo.** — Cuando un sólido descansa sobre un plano, lo toca en diferentes puntos que son los vértices de una figura plana llamada *polígono de apoyo* o *base de sustentación*.

Dicho polígono es *convexo*; si no lo fuera, se elegirían por vértices los puntos exteriores. Puede reducirse a un triángulo, a una recta o a un punto.

Equilibrio. — *La condición necesaria y suficiente para que un cuerpo que descansa sobre un plano fijo esté en equilibrio, es que el sistema de las fuerzas aplicadas al cuerpo tenga una resultante única:*

- 1º Normal al plano y que apoye el cuerpo sobre el plano;
- 2º Que pase por el interior del polígono de apoyo.

1º *Condiciones necesarias.* — El cuerpo se apoya sobre el plano por n puntos, hay pues n reacciones normales $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \dots, \mathcal{R}_n$. Estas fuerzas paralelas dan una reacción única \mathcal{R} cuyo punto de aplicación está evidentemente en el interior del *polígono convexo de apoyo*.

Para que exista el equilibrio es preciso que el sistema de las fuerzas dadas tenga una resultante única, igual y directamente opuesta a la reacción \mathcal{R} .

2º *Condiciones suficientes.* — Si se realizan estas condiciones, la fuerza R puede descomponerse, de una infinidad de maneras, en n fuerzas paralelas R_1, R_2, \dots, R_n , aplicadas en los puntos de apoyo.

El cuerpo está pues en equilibrio por la acción de los dos sistemas $(R_1 \dots R_n)$ y $(\mathcal{R}_1 \dots \mathcal{R}_n)$.

Presiones y reacciones. — *Un punto de apoyo:* La resultante R debe pasar por el punto de apoyo. La reacción \mathcal{R} es igual y directamente opuesta a la presión R .

Tres puntos de apoyo: La reacción R puede descomponerse (108) en tres componentes paralelas o presiones R_1, R_2, R_3 , en los puntos de apoyo A, B, D. Estas presiones son iguales y directamente opuestas a las reacciones $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3$, del plano ABD.

Se tiene:

$$\frac{R}{\text{superf. ABD}} = \frac{R_1}{\text{superf. CBD}} = \frac{R_2}{\text{superf. GAD}} = \frac{R_3}{\text{superf. CAB}}.$$

124. Problema. Equilibrio de una grúa. — Una grúa gira alrededor de un árbol vertical y se apoya por medio de un rodillo cónico A sobre una superficie tronco-cónica.

Sean P la carga levantada, G el peso propio de la parte giratoria de la grúa, R la resultante (fig. 115). Esta resultante pasa por el punto C, situado sobre la recta DE de los puntos de aplicación de los dos pesos.

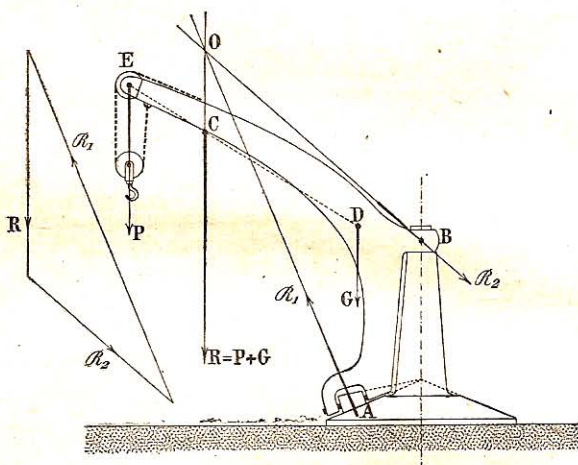


Fig. 115. — Equilibrio de una grúa.

Reacciones. — La grúa está en equilibrio por la acción de tres fuerzas: el peso total R, la reacción \mathcal{R}_1 sobre el rodillo cónico, la reacción \mathcal{R}_2 sobre la cabeza del árbol, que supondremos reducida a un punto fijo B. Estas tres fuerzas son pues fuerzas concurrentes y están situadas en un plano vertical que pasa por el eje del árbol (98).

Ahora bien la reacción \mathcal{R}_1 sobre el rodillo es normal, en A, al plano tangente a la superficie cónica (123); la reacción \mathcal{R}_2 debe pues pasar por el punto O de encuentro de las fuerzas R y \mathcal{R}_1 , y por el punto B (121).

El triángulo de las tres fuerzas determina las intensidades de las dos reacciones.

CAPÍTULO III

CENTROS DE GRAVEDAD

SUMARIO :

§ 1. *Lineas planas* : Centro de gravedad. — Perímetro del triángulo, de la línea poligonal, del arco de círculo.

§ 2. *Superficies planas* : Triángulo, trapecio, cuadrilátero, sector poligonal y sector circular. — Cuerpos de revolución, zona.

§ 3. *Volúmenes* : Prisma y cilindro; pirámide y cono; sector esférico y semiesfera. — Teoremas de Guldin.

§ 1. -- LÍNEAS PLANAS

125. Centro de gravedad de un cuerpo. — 1º Definición.
— Un *cuerpo grave* puede considerarse como un sistema de puntos materiales invariablemente unidos y solicitados por fuerzas verticales proporcionales a sus masas.

Su *peso* es la resultante de estas fuerzas; es proporcional a la masa del cuerpo : $P = Mg$ (83).

El centro de estas fuerzas paralelas se llama *centro de gravedad*.

Ocupa en el cuerpo una posición invariable (106).

El peso puede pues representarse por un vector cuya dirección, siempre vertical, pasa constantemente por el centro de gravedad.

2º Coordenadas. — Las coordenadas del centro de gravedad, respecto de tres planos de coordenadas, se calculan como las de un centro de fuerzas paralelas (112).

Sean m_1, m_2, \dots, m_n , y p_1, p_2, \dots, p_n , las masas y los pesos de los puntos materiales de un cuerpo de masa M y peso P .

La masa total $M = m_1 + m_2 + \dots + m_n = \Sigma m_i$;

y el peso total $P = p_1 + p_2 + \dots + p_n = \Sigma p_i$.

Las coordenadas x , y , z del centro de gravedad son :

$$x = \frac{\Sigma m_i x_i}{M} = \frac{\Sigma p_i x_i}{P};$$

$$y = \frac{\Sigma m_i y_i}{M} = \frac{\Sigma p_i y_i}{P};$$

$$z = \frac{\Sigma m_i z_i}{M} = \frac{\Sigma p_i z_i}{P}.$$

¶ 126. **Determinación del centro de gravedad.** — Se suspende el cuerpo (S) de un punto fijo por un hilo que se ata sucesivamente en dos puntos A y B (fig. 116). El cuerpo toma cada vez

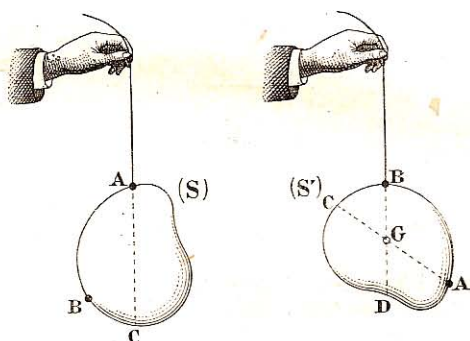


Fig. 116. — Determinación experimental del centro de gravedad.

una posición de equilibrio tal que la dirección del hilo, que es la del peso, sea vertical. El centro de gravedad se encuentra pues en la intersección G de las dos direcciones AC y BD del hilo.

127. Centro de gravedad de las líneas y superficies. — Puede hallarse el centro de gravedad de las líneas y superficies pues se las supone formadas, como los volúmenes, de puntos materiales.

Un hilo de seda, por ejemplo, se considera como un cuerpo pesado reducido a una línea; si el peso de la unidad de longitud es constante, la *línea es homogénea*.

Un cuerpo sólido muy delgado, como una hoja de papel, se asimila a una superficie; si el peso de la unidad de superficie es constante, la *superficie es homogénea*.

El volumen de un cuerpo está constituido por cubos diminutos; si el peso de la unidad es constante, el *volumen es homogéneo*.

Estudiaremos principalmente los cuerpos homogéneos.

128. Principios de investigación. — 1º Si una superficie plana posee un *diámetro rectilíneo*, el centro de gravedad está sobre dicho diámetro.

2º Si una superficie, o un volumen, tienen un *plano diametral*, el centro de gravedad está sobre dicho plano.

3º Si un cuerpo posee un *plano* o un *eje de simetría*, el centro de gravedad está sobre dicho plano o eje.

4º Si un cuerpo admite un *centro de figura*, el centro de gravedad está en dicho centro.

129. Perímetros de las figuras con centro. — **Segmento de recta.** — El *punto medio*, centro de figura y de simetría, es el centro de gravedad.

Circunferencia. — El *centro* es evidentemente centro de gravedad.

Polígono regular. — El *centro de las circunferencias circunscrita o inscrita* es centro de figura y centro de gravedad del perímetro.

Elipse. — El *centro de la elipse* es centro de gravedad.

Paralelogramo. — El *punto de intersección de las diagonales* es el centro de gravedad del perímetro, porque las diagonales son diámetros.

130. Perímetro del triángulo. — *El centro de gravedad del perímetro de un triángulo está en el centro del círculo inscrito en el triángulo cuyos vértices son los puntos medios de los lados del primer triángulo.*

Sea el triángulo ABC (fig. 117).

Los pesos de los lados, proporcionales a las longitudes, están aplicados respectivamente en los puntos medios D, E, F. Tracemos el triángulo DEF.

Sea H el punto de aplicación de la resultante de las fuerzas E y F.

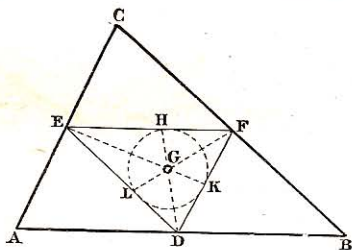


Fig. 117. — Perímetro de un triángulo. Centro de gravedad.

Se obtiene :

$$\frac{HF}{HE} = \frac{E}{F} = \frac{FD}{ED}.$$

La recta HD es bisectriz del ángulo EDF, el centro de gravedad está sobre HD, pero se encuentra igualmente sobre EK. Está pues en el punto G, intersección de las bisectrices del triángulo DEF.

Este punto es el *centro de la circunferencia inscrita* en el triángulo DEF.

131. Línea poligonal regular. — *El centro de gravedad de una línea poligonal regular está sobre el eje de simetría de dicha*

línea; su distancia al centro es una cuarta proporcional a dicha línea, su cuerda y su apotema.

Sean ABCD una línea poligonal regular, l su longitud, OM su eje de simetría (fig. 118). El centro buscado se encuentra sobre OM.

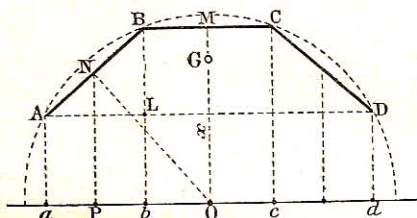


Fig. 118. — Línea poligonal regular. Centro de gravedad.

Supongamos horizontal el plano de la línea poligonal.

Sea G el centro de gravedad y x la distancia OG . Los pesos de los lados son proporcionales a sus longitudes.

Tomemos los momentos de los pesos, respecto del plano vertical cuya traza es ad , perpendicular a MO ; se verifica (125):

$$l \cdot x = \Sigma \cdot \overline{AB} \times \overline{NP}.$$

Los triángulos semejantes NOP y ABL dan:

$$\frac{AB}{NO} = \frac{AL}{NP}; \text{ de donde } \overline{AB} \times \overline{NP} = \overline{NO} \times \overline{AL}.$$

Designando por a la apotema del polígono:

$$\overline{AB} \times \overline{NP} = a \times \overline{ab};$$

de donde $l \cdot x = a(\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{cd}) = a \times \overline{ad}$,

$$\text{y } x = \frac{a \times \overline{ad}}{l}, \text{ o } \overline{OG} = \frac{\text{apotema} \times \text{cuerda}}{\text{línea}} = \frac{a \cdot c}{l}.$$

132. Arco de círculo. — El centro de gravedad de un arco de círculo está sobre el eje de simetría del arco; su distancia al centro es una cuarta proporcional al arco, su cuerda y su radio.

El arco es el límite de una línea poligonal regular, cuyo número de lados aumenta indefinidamente.

En el límite la apotema se confunde con el radio r , y el perímetro se convierte en el arco s .

$$\text{Se verifica: } \overline{OG} = \frac{\text{radio} \times \text{cuerda}}{\text{arco}} = \frac{r \cdot c}{s}.$$

Para una semicircunferencia se tiene:

$$\overline{OG} = \frac{r \times 2r}{\pi r} = \frac{2r}{\pi}.$$

§ 2. — SUPERFICIES PLANAS

133. Superficies que tienen un centro de figura. — **Polígono regular.** — El *centro de las circunferencias inscrita y circunscrita* es un centro de simetría o de figura; es centro de gravedad de la superficie y del perímetro.

Círculo y elipse. — El *centro de estas curvas de segundo grado* es centro de gravedad de la superficie, como lo es del perímetro.

134. Superficie del triángulo. — *El centro de gravedad de la superficie de un triángulo está en el punto de concurso de sus medianas* (fig. 119).

La mediana CD es un diámetro de la figura, ya que divide en dos partes iguales todas las paralelas a AB; contiene pues el centro de gravedad.

Lo mismo sucede con otra mediana BE. Así pues el centro de gravedad está en su intersección en el punto G, o sea a los $\frac{2}{3}$ de cada mediana a partir del vértice.

Observación. — Para obtener el *centro de gravedad de un polígono*, se lo divide en triángulos. En el centro de gravedad de cada uno de ellos, se aplica una fuerza vertical, proporcional a la superficie del triángulo; el centro de gravedad es el centro de dichas fuerzas paralelas.

135. Trapecio. — Sea el trapecio ABCD, de bases B y b , de altura h (fig. 120).

La recta MN, que une los puntos medios de las bases, es diámetro para las paralelas a AD, contiene pues el centro de gravedad. Además, si O y O' son los centros de gravedad de los triángulos ABC y ABD, la recta OO' contiene también el punto buscado.

El punto G, intersección de MN y de OO', es el *centro de gravedad del trapecio*.

Posición del centro de gravedad. — Supongamos el trapecio horizontal.

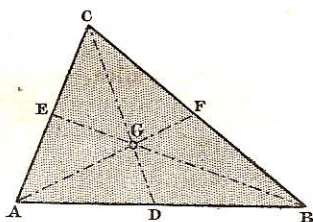


Fig. 119. — Superficie de un triángulo. Centro de gravedad.

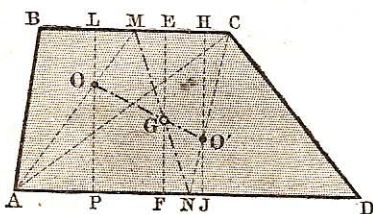


Fig. 120. — Superficie de un trapecio. Centro de gravedad.

Busquemos en que relación divide el punto G la recta MN.
Siendo x e y las distancias de G a las bases AD y BC :

$$\frac{GN}{GM} = \frac{x}{y}.$$

Sea T la superficie del trapecio. Respecto de un plano vertical AD, los momentos son :

$$T \cdot x = \frac{Bh}{2} \cdot \frac{h}{3} + \frac{bh}{2} \cdot \frac{2h}{3} = \frac{h^2}{6} (B + 2b). \quad (1)$$

Igualmente, respecto de un plano vertical BC :

$$T \cdot y = \frac{bh}{2} \cdot \frac{h}{3} + \frac{Bh}{2} \cdot \frac{2h}{3} = \frac{h^2}{6} (b + 2B). \quad (2)$$

Dividiendo (1) y (2) miembro por miembro :

$$\frac{x}{y} \text{ o } \frac{GN}{GM} = \frac{B + 2b}{b + 2B}. \quad (3)$$

Construcción gráfica. — De la fórmula (3) se deduce la construcción siguiente (fig. 121). Se prolonga, en sentido contrario, cada base en una cantidad igual a la otra base. Uniendo los puntos E y F así obtenidos, la recta EF corta MN en el punto G.

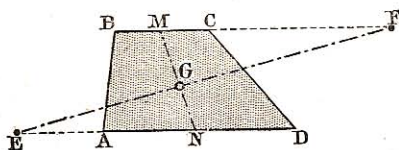


Fig. 121. — Determinación gráfica del centro de gravedad de un trapecio.

En efecto, los triángulos semejantes GNE y GMF dan :

$$\frac{GN}{GM} = \frac{\frac{B}{2} + b}{\frac{b}{2} + B} = \frac{B + 2b}{b + 2B}.$$

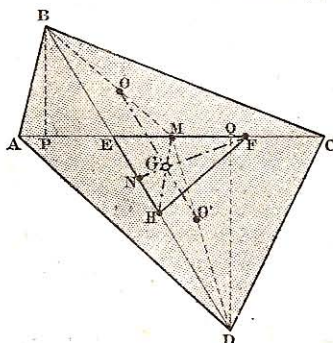


Fig. 122. — Cuadrilátero. Centro de gravedad.

136. Cuadrilátero. — Sea el cuadrilátero ABCD (fig. 122); M y N los puntos medios de las diagonales; O y O' los centros de gravedad de los triángulos ABC y ADC.

Tomemos

$$CF = AE, \quad DH = BE;$$

Tracemos MH y NF; el punto de intersección G es el centro de gravedad del cuadrilátero.

En efecto, se obtiene :

$$\frac{OG}{O'G} = \frac{BH}{DH} = \frac{DE}{BE}.$$

Pero los triángulos ABC y ADC tienen una base común AC, así pues :

$$\frac{ADC}{ABC} = \frac{DQ}{BP} = \frac{DE}{BE};$$

y

$$\frac{OG}{O'G} = \frac{BH}{DH} = \frac{ADC}{ABC}.$$

Por consiguiente MH, al cortar a OO', determina el centro de gravedad.

Se demostraría del mismo modo que se encuentra sobre la recta NF. Está pues en la intersección de MH y NF.

Observación. — El centro de gravedad G coincide con el del triángulo EFH, que tiene por vértices la intersección E de las diagonales y las simétricas F, H, de E respecto de los puntos medios M, N, de las diagonales.

137. Sector poligonal regular. — *El centro de gravedad de un sector poligonal regular está sobre el eje de simetría del sector; su distancia al centro es los 2/3 de la cuarta proporcional a esta línea, su cuerda y su apotema.*

Sea el sector poligonal regular OABCD (fig. 123). Descompongámoslo en triángulos iguales que tengan por vértice el centro O del sector y por bases los lados AB, BC y CD de la línea poligonal.

Los centros de gravedad g_1, g_2, g_3 de los triángulos OAB, OBC, OCD, están a los 2/3 de las apotemas OI, OM, OL.

El problema se reduce pues a encontrar el centro de gravedad de pesos iguales aplicados en g_1, g_2, g_3 , puntos medios de los lados A'B', B'C', C'D'; es decir el centro G de la línea poligonal regular A'B'C'D' homotética de la línea ABCD (131).

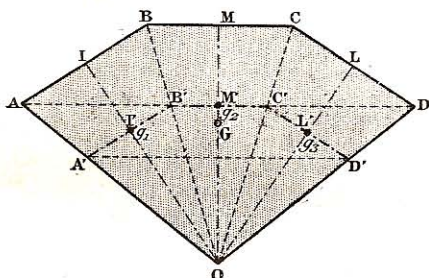


Fig. 123. — Sector poligonal regular. Centro de gravedad.

Se tiene :

$$\overline{OG} = \frac{OM' \times A'D'}{A'B'C'D'} = \frac{\frac{2}{3} OM \times \frac{2}{3} AD}{\frac{2}{3} ABCD},$$

o

$$\overline{OG} = \frac{2}{3} \times \frac{\text{apotema} \times \text{cuerda}}{\text{línea}} = \frac{2}{3} \times \frac{a \cdot c}{l}.$$

138. Sector circular. — *El centro de gravedad de un sector circular está sobre el eje de simetría del sector; su distancia al centro es los 2/3 de la cuarta proporcional al arco, su cuerda y su radio.*

El sector circular es el límite de un sector poligonal regular cuyo número de lados aumenta indefinidamente.

En el límite, la apotema se convierte en el radio r , y el perímetro se confunde con el arco s .

$$\text{Se tiene: } \overline{OG} = \frac{2}{3} \times \frac{\text{radio} \times \text{cuerda}}{\text{arco}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{r \cdot c}{s}.$$

Para un *semicírculo* :

$$\overline{OG} = \frac{2}{3} \times \frac{r \cdot 2r}{\pi r} = \frac{4}{3} \cdot \frac{r}{\pi}.$$

139. Cuerpos de revolución. Zona esférica. — Esfera.

— El centro de gravedad de la superficie y del volumen está en el *centro de la esfera*.

Elipsoide de revolución. — Es engendrado por una elipse que gira alrededor de uno de sus ejes. El *centro de la elipse generatriz* es el centro de gravedad de la superficie y del volumen.

Cuerpos de revolución. — El centro de gravedad de la superficie y del volumen está sobre el eje de rotación, que es un eje de simetría.

Zona esférica. — *El centro de gravedad de una zona esférica está en el punto medio de la recta que une los centros de sus bases.*

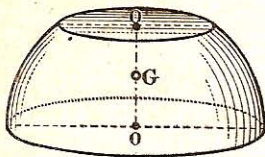


Fig. 124. — Zona esférica.
Centro de gravedad.

La recta OO' , eje de figura, contiene el centro de gravedad de la zona (fig. 124).

Planos equidistantes, paralelos a las bases, determinan zonas equivalentes, cuyos centros de gravedad están sobre OO' . En todos estos centros se aplican fuerzas iguales, *repartidas uniformemente*

sobre el eje OO' ; su resultante está pues en medio de este eje.

El punto G es el centro de gravedad de la zona.

§ 3. — VOLÚMENES

140. Prisma. Cilindro. — *El centro de gravedad de un prisma está en el punto medio de la recta que une los centros de gravedad de sus bases.*

Prisma triangular. — El plano $AHID$, trazado por las medianas AH y DI de las bases, es el plano diametral de las paralelas a BC ; contiene el centro de gravedad del prisma (fig. 125). Lo mismo sucede con el plano $CLJF$.

Así pues el centro buscado se encuentra sobre OO' , intersección de ambos planos.

El plano MNP trazado por el medio de las aristas laterales, es plano diametral de las paralelas a estas aristas; el punto G en que corta a OO' es pues el centro de gravedad del prisma. Está en el punto medio de OO' .

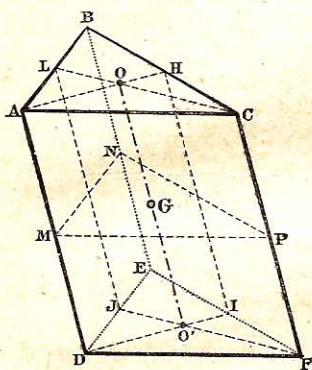


Fig. 125. — Prisma triangular.

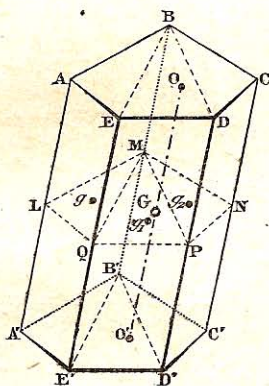


Fig. 126. — Prisma cualquiera.

Centros de gravedad.

Prisma cualquiera. — Descompongamos el sólido en prismas triangulares; sus centros de gravedad están en g, g_1, g_2 , sobre el plano LN que pasa por el medio de sus aristas; estos puntos g, g_1, g_2 , son también los centros de gravedad de los triángulos LMQ, QMP, PMN (fig. 126).

Los pesos de los prismas parciales son proporcionales a las superficies de los triángulos LMQ, QMP, PMN ; la resultante de las fuerzas g, g_1, g_2 , se aplica en el centro de gravedad G del polígono $LMNPQ$; ahora bien, este G es el punto medio de la recta OO' que une los centros de gravedad de las bases del prisma.

Cilindro. — El cilindro es un prisma de una infinidad de caras. Así pues:

El centro de gravedad de un cilindro está en el punto medio de la recta que une los centros de gravedad de sus bases.

141. Pirámide. Cono. — *El centro de gravedad de una pirámide está sobre la recta que une el vértice con el centro de gravedad de la base, y a los $3/4$ de esta recta a partir del vértice.*

Tetraedro. — Los planos medianos SAM y SBN son planos diametrales; el centro buscado está en su intersección SO ; esta recta une el vértice S con el centro de gravedad de la cara ABC (fig. 127).

Del mismo modo, el centro de gravedad del tetraedro está sobre AO'

que une el vértice A con el centro de gravedad de la cara BSC; estas dos rectas SO y AO' están en el mismo plano SAM y se cortan en un punto G que es el centro buscado.

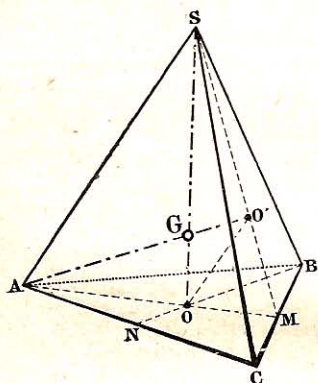


Fig. 127. — Tetraedro.
Centro de gravedad.

Ahora bien, los triángulos semejantes OGO' y SGA dan :

$$\frac{OG}{GS} = \frac{OO'}{AS}.$$

Por ser semejantes los triángulos OO'M y ASM :

$$\frac{OO'}{AS} = \frac{OM}{AM} = \frac{1}{3};$$

así pues $\frac{OG}{GS} = \frac{1}{3};$

por consiguiente $\frac{SG}{SO} = \frac{3}{4}.$

Pirámide cualquiera. — La recta SO que une el vértice con el centro de gravedad de la base, contiene el centro de gravedad de la pirámide (fig. 128).

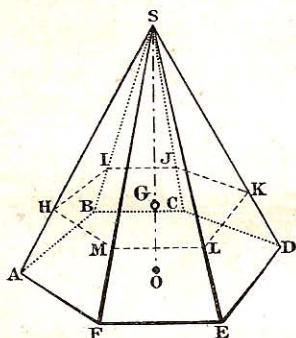


Fig. 128. — Pirámide cualquiera.
Centro de gravedad.

El plano HK trazado paralelamente a la base por el punto H, situado a los $\frac{3}{4}$ de SA a partir del vértice, contiene el centro de gravedad de los tetraedros que componen la pirámide dada. El punto G, intersección del plano HK con la recta SO, es el centro de gravedad de la pirámide.

Cono. — El cono es el límite de una pirámide cuyo número de caras aumenta indefinidamente. Así pues :

El centro de gravedad de un cono está a los $\frac{3}{4}$ de la recta que une el vértice con el centro de gravedad de la base.

142. Sector esférico y semiesfera. — **Sector esférico.** — Sea OACB un sector esférico (fig. 129). Se compone de una infinidad de pirámides que tienen por vértice el centro O y por bases elementos de superficie de la zona ACB. Los centros de gravedad de estas pirámides elementales están a los $\frac{3}{4}$ del radio a partir del centro, *uniformemente repartidos* sobre la zona LDM de radio

$$OL = \frac{3}{4} OA;$$

El centro buscado es pues el centro de gravedad G de dicha zona. Se encuentra en el punto medio de su altura DH.

Pero :

$$\overline{OG} = \overline{OD} - \overline{DG} = \frac{3}{4}r - \frac{1}{2}\overline{DH}.$$

Sea h la altura CE de la zona que sirve de base al sector :

$$\overline{DH} = \frac{3}{4}h.$$

Así pues :

$$\overline{OG} = \frac{3}{4}r - \frac{3}{8}h = \frac{3}{8}(2r - n).$$

Semiesfera. — Como $h = r$;

$$\overline{OG} = \frac{3}{8}r.$$

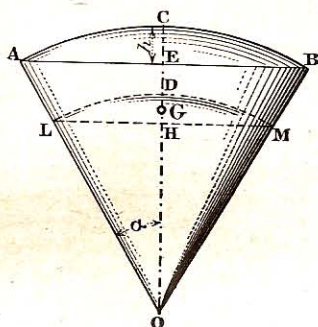


Fig. 129. — Sector esférico. Centro de gravedad.

143. Teoremas de Guldin*. — No limitaremos en enunciarlos.

1er Teorema. — *El área S engendrada por una línea plana, que gira alrededor de un eje situado en su plano y que no la atraviesa, es igual al producto de la longitud l de esta línea generatriz por la circunferencia $2\pi x$, que describe su centro de gravedad :*

$$S = 2\pi xl.$$

2o Teorema. — *El volumen V engendrado por una superficie plana, que gira alrededor de un eje situado en su plano y que no la atraviesa, es igual al producto del área S de esta superficie generatriz por la circunferencia $2\pi x$ que describe su centro de gravedad :*

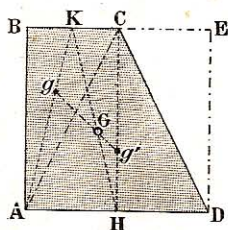
$$V = 2\pi xS.$$

144. Problemas sobre los centros de gravedad. — 1o *Encontrar el centro de gravedad de un trapecio rectángulo cuya base mayor iguale la altura y cuya base menor es la mitad de la mayor.*

Esta superficie se compone de dos triángulos ABC y ABD, teniendo el segundo superficie doble de la del primero.

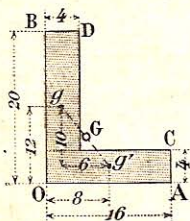
Se verifica pues: $\frac{Gg'}{Gg} = \frac{1}{2}$,

$$\frac{GH}{GK} = \frac{B + 2b}{2B + b} = \frac{4}{5}.$$



2o *Determinar el centro de gravedad de un hierro de escuadra cuya base es los $\frac{4}{5}$ de la altura y cuyo espesor es $\frac{1}{4}$ de la base.*

Supongamos que la base $OA = 16\text{cm}$, la altura $OB = 20\text{cm}$, y el espesor $AC = 4\text{cm}$; la escuadra se descompone en dos rectángulos iguales, cuyos centros son g y g' ; el centro de gravedad buscado G está pues en el punto medio de gg' .



Su distancia a OA es :

$$a = 5 + 2 = 7\text{cm};$$

y a OB :

$$b = 3 + 2 = 5\text{cm}.$$

3º Centro de gravedad de dos esferas distantes 10cm de centro a centro, y unidas por una varilla de peso despreciable. Una es de hierro de densidad $7,5$ y de radio $r = 1$; la otra de aluminio, de densidad $2,5$ y de radio $r' = 3$.

Los pesos, aplicados a los centros g y g' , están en la relación :

$$\frac{P}{P'} = \frac{7,5 \times 1^3}{2,5 \times 3^3} = \frac{1}{3^2}.$$

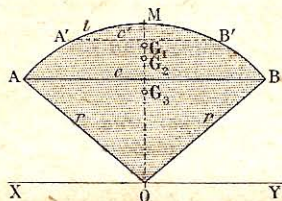
Por consiguiente

$$\frac{Gg'}{Gg} = \frac{1}{9};$$

de donde

$$Gg = 9\text{cm} \quad \text{y} \quad Gg' = 1\text{cm}.$$

4º Determinar por medio de los teoremas de Guldin, los centros de gravedad de un arco de círculo, de un segmento circular de una o dos bases, de un sector circular.



Durante la rotación alrededor del eje XY, el arco de círculo AMB engendra una zona de superficie $2\pi rc$; el segmento circular AMB, un segmento esférico de volumen $1/6 \pi c^3$; el sector circular OAMB, un sector esférico de volumen $2/3 \pi r^2 c$.

Sean G_1, G_2, G_3 , los centros de gravedad respectivos, y x_1, x_2, x_3 , sus distancias al centro O.

Se tiene :

$$1^\circ S = 2\pi x_1 l = 2\pi rc;$$

$$\text{de donde } x_1 = \frac{r \cdot c}{l} \quad (132).$$

$$2^\circ V = 2\pi x_2 S = \frac{1}{6} \pi c^3;$$

$$\text{de donde } x_2 = \frac{c^3}{12S} \quad (\text{una base}),$$

$$3^\circ V' = 2\pi x_3 S' = \frac{1}{6} \pi (c^3 - c'^3);$$

$$\text{de donde } x_3 = \frac{c^3 - c'^3}{12S'} \quad (\text{dos bases}).$$

$$3^\circ V = 2\pi x_3 \cdot \frac{rl}{2} = \frac{2}{3} \pi r^2 c;$$

$$\text{de donde } x_3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{rc}{l} \quad (138).$$

CAPÍTULO IV

ESTÁTICA DE LAS MÁQUINAS¹

SUMARIO

1. *Palanca. Balanza*: Equilibrio; tres géneros de palancas. — Balanza ordinaria de Roberval. — Romana. — Básculas de Quintenz y de Beranger.

§ 2. *Polea. Torno*: Polea fija, polea móvil; polipastos; polipasto diferencial. — Torno sencillo, cabrestante, torno de canteros, torno de engranajes, torno diferencial. — Gato, grúa, cabria.

§ 3. *Plano inclinado. Tornillo*: Equilibrio sobre el plano inclinado, y equilibrio del tornillo sin rozamiento o con él.

§ 1. — PALANCA. — BALANZA.

145. Clasificación de las máquinas. — *En Estática, una máquina es cualquier cuerpo o sistema de cuerpos enlazados y destinados a transmitir la acción de las fuerzas.*

Una *máquina simple* está constituida por un solo cuerpo sólido: una palanca:

Una *máquina compuesta* es un sistema de máquinas simples: un grúa.

Clasificación. — Según la naturaleza de los enlaces las máquinas simples se llaman:

1º *Palanca*, cuando el enlace es un punto fijo;

2º *Polea, torno sencillo*, cuando es un eje fijo;

3º *Plano inclinado*, cuando es un plano fijo;

4º *Tornillo*, cuando es un plano fijo y un eje inclinado sobre el plano.

Equilibrio. — Una máquina simple está generalmente sometida a la acción de dos fuerzas: *la potencia y la resistencia.*

La *Estática aplicada* investiga las relaciones entre la potencia que ha de producirse y la resistencia por vencer para que esté la máquina en equilibrio.

¹ Cf. MÉCANIQUE THÉORIQUE ET PRATIQUE, para los capítulos de la Estática gráfica de la Resistencia de los materiales.

146. Palanca. — La palanca es un cuerpo sólido, móvil alrededor de un punto fijo.

Se le da generalmente la forma de una barra de madera o de metal. El punto fijo es el punto de apoyo o fulcro, y las perpendiculares trazadas desde el punto de apoyo sobre las direcciones de las fuerzas son los brazos de palanca.

Equilibrio. — Para que una palanca esté en equilibrio, es preciso y suficiente: 1º que la potencia y la resistencia estén en un mismo plano con el punto de apoyo; 2º que tiendan a hacer girar la palanca en sentido contrario; 3º que sean inversamente proporcionales a sus brazos de palanca.

Para que la palanca ACB esté en equilibrio bajo la acción de las fuerzas P y Q (fig. 130), es preciso y suficiente que tengan una resultante R que pase por el punto fijo C (124). Resulta que:

1º Las fuerzas P, Q y el punto fijo están en el mismo plano;

2º Deben tender a hacer girar la palanca en sentidos contrarios, sino su resultante no aplicaría la palanca contra el punto C;

3º El momento resultante respecto del punto C es nulo:

$$P \times \overline{CM} - Q \times \overline{CN} = 0;$$

$$\text{de donde } \frac{P}{Q} = \frac{CN}{CM} = \frac{q}{p};$$

p y q son los brazos de palanca CM y CN.

Carga del punto de apoyo. — Esta carga es igual a la resultante de las fuerzas P y Q:

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ \cos(\widehat{P, Q}).$$

Varía con el ángulo de las fuerzas; es máxima para 0º, en que $R = P + Q$, y mínima para 180º, en que $R = P - Q$.

147. Tres géneros de palancas. — Según las posiciones relativas del punto de apoyo, de la resistencia y de la potencia, se distinguen tres clases de palancas.

Primer género. Palanca inter-móvil. — El punto de apoyo está entre la potencia y la resistencia.

Ejemplos: la alzaprima del albañil (fig. 131), las balanzas.

Las tijeras y las tenazas dobles de primer género.

Segundo género. Palanca inter-resistente. — La resistencia está entre la potencia y el punto de apoyo.

Ejemplos: El cuchillo de panadero, la carretilla (fig. 132), una viga que se levanta por un extremo, el remo que mueve la barca, etc.

El cascanueces es una palanca doble de segundo género.

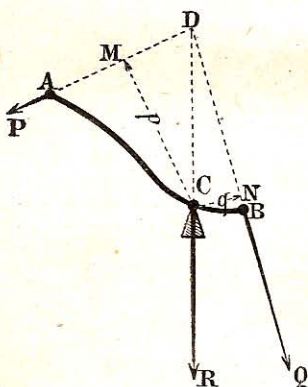


Fig. 130. — Equilibrio de la palanca.

Tercer género. Palanca inter-potente. — La potencia está entre la resistencia y el punto de apoyo.



Fig. 131. — La alzaprima del albañil,
palanca de primer género.

Ejemplos : el pedal del amolador (fig. 133), los miembros articulados del hombre y de los animales.

Las pinzas son palancas dobles de tercer género.

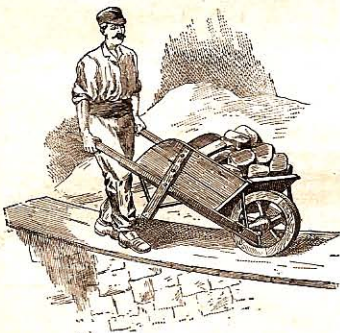


Fig. 132. — La carretilla,
palanca de segundo género.



Fig. 133. — El pedal del amolador,
palanca de tercer género.

Observaciones. — 1º En la palanca de primer género, se puede tener $p=q$, en el caso $P=Q$; es el caso de la balanza. Generalmente se toma $p>q$ o $P<Q$, se dice entonces que la palanca es *favorable a la potencia*.

2º Lo mismo sucede con la palanca de segundo género, en que $p>q$.

3º En la palanca de tercer género, por lo contrario, $p<q$; esta palanca es *desfavorable a la potencia*, pero es *favorable a la velocidad*.

148. Balanza ordinaria. — La balanza ordinaria es una palanca de primer género, de brazos iguales, que sirve para hallar el peso relativo de los cuerpos, y, por lo tanto, la masa de los mismos.

La *cruz* o *astil* AB descansa por medio de una *cuchilla* de acero templado C, sobre dos *cojinetes* de acero o de ágata (fig. 134).

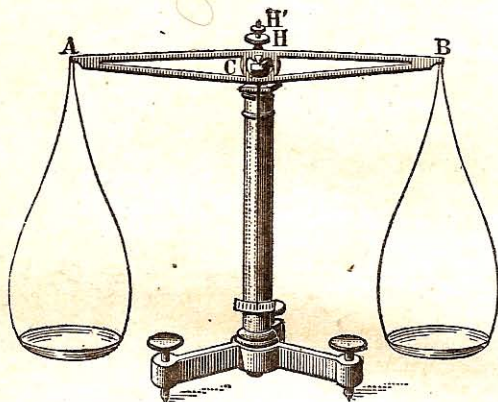


Fig. 134. — Balanza ordinaria de cruz.

Los *platillos* están colgados, por medio de *cuchillas* de arista viva y ganchos de acero. Las aristas de las tres *cuchillas* A, C, B, están en una misma línea.

En medio de la palanca hay una *aguja* o *fiel*, perpendicular al eje, y cuyo extremo se mueve delante de un arco graduado; el cero de la graduación corresponde a la posición de equilibrio de la balanza.

Tres tornillos reguladores permiten poner la columna vertical. Por último, las dos tuercas H y H' permiten variar la sensibilidad de la balanza.

149. Balanza de Roberval*. — Esta balanza (fig. 135) es más cómoda que la anterior para los usos corrientes del comercio.

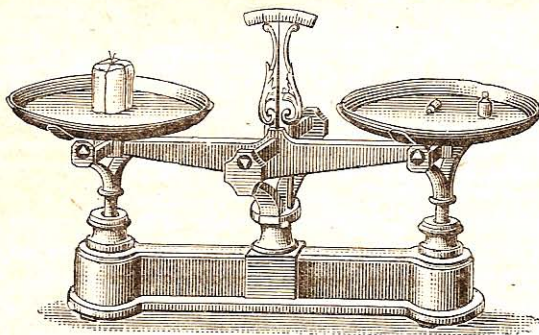


Fig. 135. — Balanza de Roberval.

Se compone de dos astiles AB y $A'B'$ móviles alrededor de los puntos fijos C y C' , y articulados con los vástagos verticales AA' , BB' que soportan los platillos (fig. 136).

Según esta disposición en forma de paralelogramo articulado, los vástagos AA' y BB' permanecen siempre verticales y equidistantes de CC' .

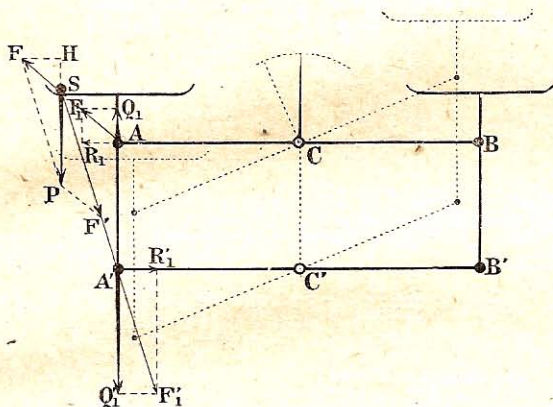


Fig. 136. — Equilibrio de la balanza de Roberval.

El cuerpo puede colocarse en un punto cualquiera del platillo.

El peso P da dos componentes F y F' , cuyas direcciones pasan por los puntos de articulación A y A' . Cada una de las fuerzas F y F' , es la resultante de las componentes Q_1 y R_1 para $F_1 = F$, Q'_1 y R'_1 para $F'_1 = F'$.

Ahora bien, $SP = PH - SH = A'Q'_1 - AQ_1$.

Así pues $P = Q'_1 - Q_1$,

cualquiera que sea la posición sobre el platillo.

150. Balanza romana. — *La romana es una palanca de primer género de brazos desiguales.*

La romana está mantenida por unas armaduras con un anillo C ; los cuerpos que han de pesarse se cuelgan de un gancho A (fig. 137).

Sobre el brazo largo del astil se mueve un cursor con una masa P , llamada *pilón*, destinada a equilibrar y a indicar el peso del cuerpo Q .

Teoría. — Sean E el punto en que hay que colocar el pilón P para que el astil quede horizontal, sin carga colgada del gancho, π el peso del instrumento, d la distancia del punto de suspensión C al centro de gravedad G (que es inútil determinar).

Sin carga, el momento de la resultante, respecto de C , es nulo :

$$\pi d - P \times \overline{CE} = 0. \quad (1)$$

Cuando se cuelga del gancho el cuerpo que se quiere pesar, es preciso, para restablecer el equilibrio, trasladar el pilón P hasta D.

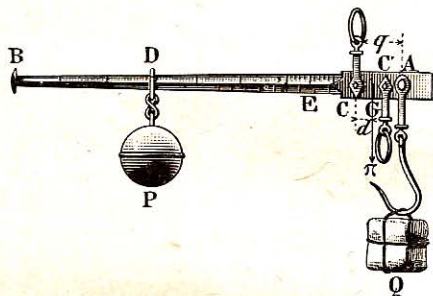


Fig. 137. — Balanza romana.

Sean Q el peso del cuerpo y q su brazo de palanca CA; la ecuación de equilibrio se convierte en :

$$\pi d + Qq - P \times \overline{CD} = 0. \quad (2)$$

Restando (1) de (2) se obtiene :

$$Qq = P \times \overline{DE}. \quad (3)$$

Graduación. — La distancia DE es proporcional al peso del cuerpo; basta pues suspender al gancho un peso conocido, 10 kilogramos, por ejemplo, y señalar 10 en el punto D en que hay que colocar el cursor para restablecer el equilibrio: el intervalo DE se divide en 10 partes iguales, y la graduación se continúa hasta B.

La romana está provista de dos ganchos de suspensión: el gancho C' sirve para los cuerpos más pesados; por lo cual el brazo mayor de la palanca, lleva dos graduaciones.

Este instrumento es muy cómodo para las operaciones que no piden gran precisión.

151. Báscula de Quintenz. — La balanza de Quintenz sirve para cargas pesadas.

El cuerpo que se quiere pesar se coloca sobre un tablero AB, apoyado en dos puntos f y f_1 , sobre una *doble palanca de segundo género* EGH. Por medio de la travesía DD', la carga obra sobre otra *palanca de segundo género* FDL. El astil HN es una *palanca del primer género* en que

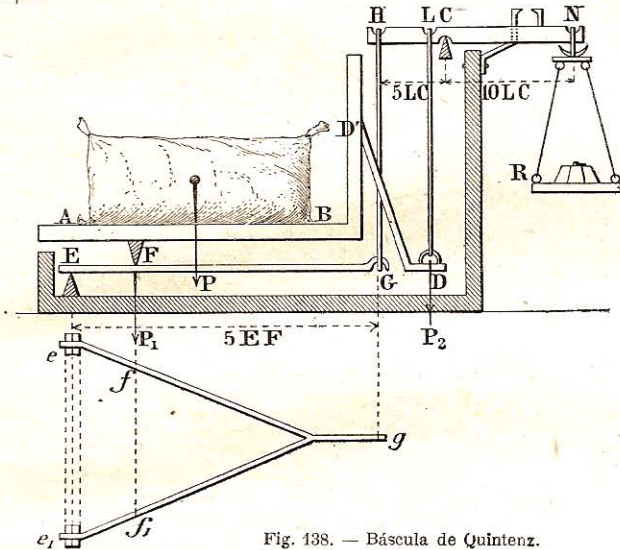
$$NC = 10LC \quad \text{y} \quad HC = 5LC.$$

Entre los brazos de palanca existe la relación :

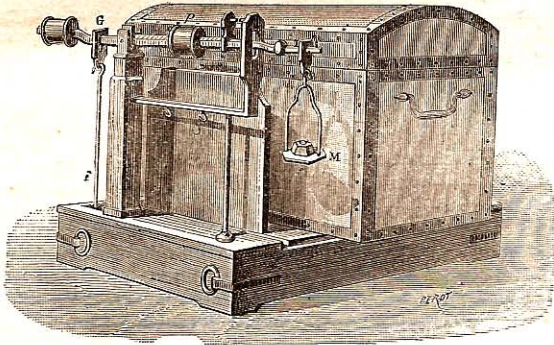
$$\frac{LC}{HC} = \frac{EF}{EG} = \frac{1}{5}.$$

Se puede pues colocar la carga en un punto cualquiera del tablero y equilibrarla en el platillo R con pesos de valor diez veces menor.

Observación. — En los puentes de balanza, que sirven para pesar los coches y vagones, se agrega una palanca suplementaria en la relación de 1/10.



152. Báscula romana de Beranger. — La báscula de Beranger es una báscula ordinaria provista de una romana, cuyo ástil graduado está



colocado paralelamente a lo largo del tablero. Un cursor P sirve para los pesos inferiores a 100 kilogramos; el platillo M para los pesos superiores (fig. 139).

El tablero descansa por cuatro puntos a, a_1, b, b_1 (fig. 140) sobre palan-

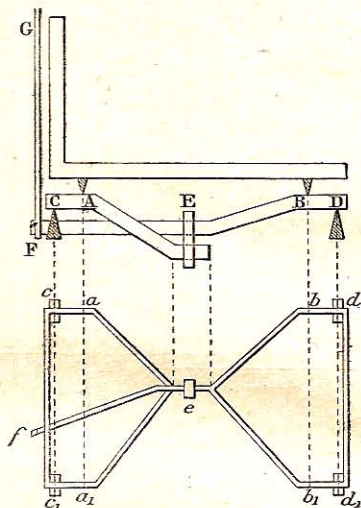


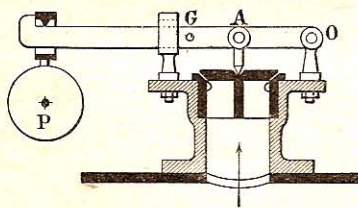
Fig. 140. — Tablero de la báscula de Beranger.

cas de segundo género FD y EC en que $FD=10BD$, $CE=5C'$, $FD=2ED$.

La carga se equilibra en F con un peso diez veces menor y, por medio de la romana, con un peso cien veces menor en el platillo M .

153. Problemas sobre la palanca. — 1º ¿Qué potencia hay que ejercer sobre los brazos de una carretilla, a 1^m de la rueda, para transportar una carga de 100 kilogramos colocada a $0^m,25$ del apoyo?

Se tiene : $P \times 100^{\text{cm}} = 100 \text{ kg} \times 25^{\text{cm}}$,
luego $P = 25^{\text{kg}}$.



2º Una válvula de seguridad de caldera tiene 60^{mm} de diámetro. El empuje del vapor que es 8^{kg} , por centímetro cuadrado, está equilibrado por un contrapeso P . El punzón de la válvula obra sobre una palanca en un punto fijo O ; situado a $0^m,10$ del punto fijo O ; la palanca pesa 5^{kg} , y su centro de gravedad G está a $0^m,30$ de

O . — ¿Cuál es el valor del contrapeso P que hay que suspender a $0^m,50$ del punto fijo?

El empuje del vapor sobre la válvula es :

$$Q = \frac{\pi \times 6^2}{4} \times 8^{\text{kg}} = 28^{\text{cm}^2,274} \times 8^{\text{kg}} = 226^{\text{kg},192}.$$

La ecuación de equilibrio, respecto del punto O, es :

$$P \times 50^{\text{cm}} + 5^{\text{kg}} \times 30^{\text{cm}} - 226^{\text{kg}} \times 10^{\text{cm}} = 0;$$

de donde
$$P = \frac{2261,92 - 150}{50} = 42^{\text{kg}},24.$$

3º Según se pesa un cuerpo en uno u otro de los platillos de una balanza, se le equilibra con 81 o con 84gr. — Determinese el peso real del cuerpo y la relación entre la longitud de los dos brazos de la balanza.

Sean P el peso real, l y l' los dos brazos de palanca.

En el primer caso
$$Pl = 81^{\text{gr}} \times l',$$

y en el segundo
$$Pl' = 84^{\text{gr}} \times l.$$

Multiplicando : $P^2 = 81 \times 84$; de donde $P = 9\sqrt{84} = 82^{\text{gr}},437.$

Dividiendo : $\frac{l^2}{l'^2} = \frac{81}{84}$; de donde $\frac{l}{l'} = \sqrt{\frac{81}{84}} = 0,982.$

§ 2. — POLEA. — TORNO

154. Polea fija. — La polea es un disco circular, móvil alrededor de un eje.

La polea lleva una garganta para el paso de la cuerda o de la cadena. El eje es una espiga cilíndrica que descansa entre las dos ramas de una chapa, llamadas *armas* (fig. 141).

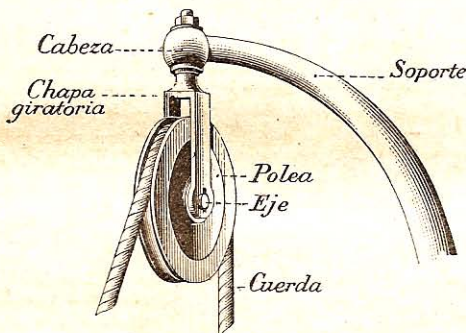


Fig. 141. — Polea fija con su chapa de suspensión.

En la *polea fija*, la chapa está colgada de un soporte y se orienta según la dirección de los ramales de la cuerda.

Equilibrio. — Para que una polea fija esté en equilibrio, es preciso que la potencia sea igual a la resistencia. (No se tienen en cuenta los rozamientos del eje y de la cuerda.)

Para que haya equilibrio es preciso y suficiente que la resultante pase por el punto fijo O (121) (fig. 142).

Traslademos la potencia P y la resistencia Q , en su propia dirección, a los puntos A y B de contacto con la polea. El momento lineal de la resultante, respecto del punto O , es nulo.

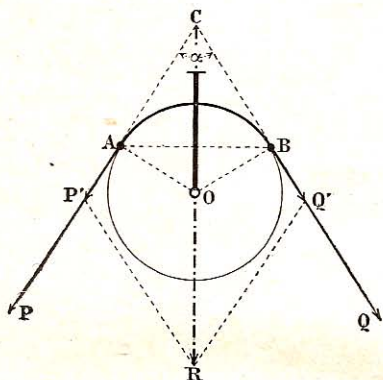


Fig. 142. — Equilibrio de la polea fija.

$$P \times \overline{OA} - Q \times \overline{OB} = 0;$$

de donde $P = Q$.

La polea fija no multiplica pues la potencia, transforma sencillamente el esfuerzo de suspensión de la carga en un esfuerzo de tracción más fácil de realizar.

Presión sobre el eje. — Las fuerzas P y Q tienen una resultante R que es la presión sobre el eje.

Sea α el ángulo de los ramales.

Se tiene:

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \alpha,$$

o

$$R^2 = 2P^2(1 + \cos \alpha) = 4P^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2};$$

luego

$$R = 2P \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Carga máxima. — Cuando los ramales son paralelos:

$$\alpha = 0; \quad R = 2P.$$

155. Polea móvil. — La carga se suspende

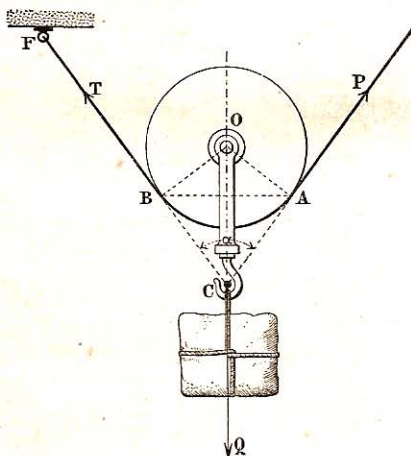


Fig. 143. — Equilibrio de la polea móvil.

de la polea; uno de los ramales se fija en F , sobre el otro actúa la potencia P (fig. 143).

Equilibrio. — Para que una polea móvil esté en equilibrio, es preciso y suficiente que la resultante de las dos tensiones, iguales a la potencia, que obran sobre los ramales, sea igual y esté directamente opuesta a la resistencia.

Cuando el equilibrio está establecido, se puede suprimir el punto fijo y sustituirle la reacción T . La polea está entonces en equilibrio bajo la acción de tres fuerzas Q, P, T . Sin cambiar el estado de equilibrio, se puede fijar la polea: las tensiones P y T sobre los ramales son pues iguales.

Ahora bien, estando las tres fuerzas trasladadas en su propia dirección a su punto de concurso C, la resistencia Q es igual y está directamente opuesta a la resultante de las dos tensiones iguales P y T que obran sobre los ramales (98).

Potencia. — Sea α el ángulo de los ramales.

La resultante R de las tensiones iguales es :

$$R = Q = 2P \cos \frac{\alpha}{2} \text{ (en valor absoluto).}$$

Luego

$$P = \frac{Q}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}.$$

En el caso particular de los *ramales paralelos* :

$$\alpha = 0 \text{ y } P = \frac{Q}{2}.$$

Es la *potencia mínima*.

A medida que α crece de 0 a π , P crece de $\frac{Q}{2}$ al infinito; no se puede, cualquiera que sea la potencia ejercida, mantener la cuerda horizontal.

Presión sobre el eje. — La presión sobre el eje es igual a la resistencia Q.

Su *valor máximo* es 2P cuando están paralelos los dos ramales.

156. Polipasto. — El *polipasto* es una reunión de varias poleas en una misma *chapa*.

Equilibrio. — *En un polipasto la potencia es una fracción de la resistencia, cuyo denominador es igual al número de ramales intermedios.*

Supongamos las poleas del *polipasto* bastante separadas para que los ramales puedan considerarse como paralelos (fig. 144).

La resistencia Q se reparte entre k ramales paralelos, cada uno de los cuales recibe una parte de

dicho esfuerzo, igual a $\frac{Q}{k}$;

la potencia P, que equilibra la tensión de uno de los ramales sobre la polea fija A, vale pues :

$$P = \frac{Q}{k}.$$

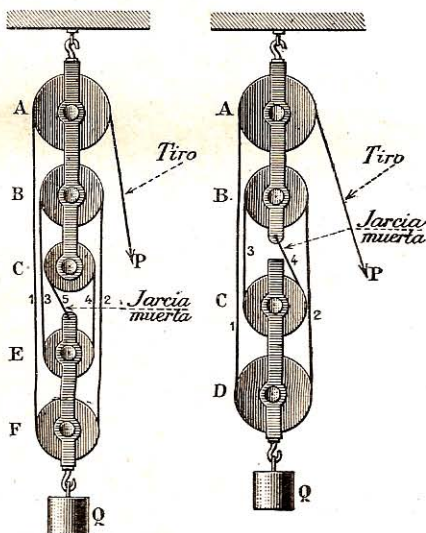


Fig. 144. — Polipasto de cuatro o cinco poleas.

157. Polipasto diferencial. — El *polipasto* diferencial, o de Weston, se compone de dos poleas solidarias fijas, de radios diferentes, y de una polea móvil que soporta la carga (fig. 145).



Fig. 145. — Polipasto diferencial.

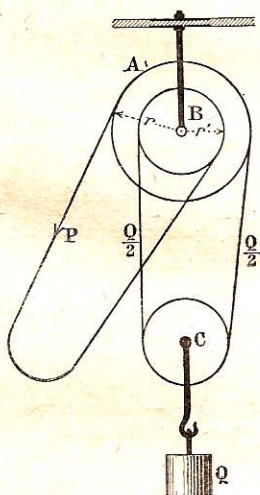


Fig. 146.
Equilibrio del polipasto diferencial.

Estos polipasto permiten levantar, a mano, cargas de unos 3000 kilogramos.

Equilibrio. — La cadena se arrolla sobre una de las poleas fijas, mientras se desarrolla en una longitud menor en la otra; los ramales de la polea móvil son sensiblemente paralelos (fig. 146).

Estando establecido el equilibrio, los momentos, respecto del eje O, dan la ecuación :

$$\frac{Q}{2} r - Pr - \frac{Q}{2} r' = 0.$$

De donde
$$Pr = \frac{Q}{2} (r - r'),$$

y
$$P = \left(\frac{r - r'}{2r} \right) Q.$$

Así pues, cuanto más pequeña sea la diferencia $r - r'$, menor será el esfuerzo de la potencia.

158. Torno sencillo. — El torno sencillo es un cilindro de revolución que puede girar alrededor de su eje.

El cilindro descansa, por dos gorriones X y X' sobre cojinetes (fig. 147).

Equilibrio. — Para que un torno sencillo esté en equilibrio, es preciso y suficiente :

1º Que la potencia y la resistencia tiendan a hacer girar el torno en sentido contrario ;
2º que sean inversamente proporcionales a los radios de la rueda y del cilindro.

La potencia P obra en A, tangencialmente a una rueda O de eje XX'; la resistencia Q se ejerce en B, tangencialmente al cilindro. Es evidente que el equilibrio exige que P y Q tiendan a hacer girar el torno en sentidos contrarios.

En el punto C, situado en el plano que contiene el eje, y en el punto B, apliquemos dos fuerzas P' y P₁, iguales a P, tangentes a la circunferencia O y de sentidos contrarios. No cambian el estado de equilibrio del sistema.

Las dos fuerzas iguales P y P₁ tienen una resultante E que pasa por el centro O; está destruida por la resistencia del eje. Quedan las dos fuerzas paralelas P' y Q, cuya resultante S ha de encontrar el eje XX' para que exista el equilibrio.

Entonces la suma algebraica de los momentos de P' = P y de Q respecto de XX' es nula :

$$Pr - Qr' = 0;$$

de donde

$$\frac{P}{Q} = \frac{r'}{r}.$$

Presión sobre los cojinetes. — Las fuerzas que obran sobre el cilindro son : 1º la resultante S; 2º el peso del torno, aplicado en el centro de gravedad; 3º la resultante E, en O.

Cada una de estas fuerzas se descompone en dos fuerzas paralelas, en los puntos de apoyo X y X'; la resultante de las tres componentes es la presión sobre cada uno de los cojinetes.

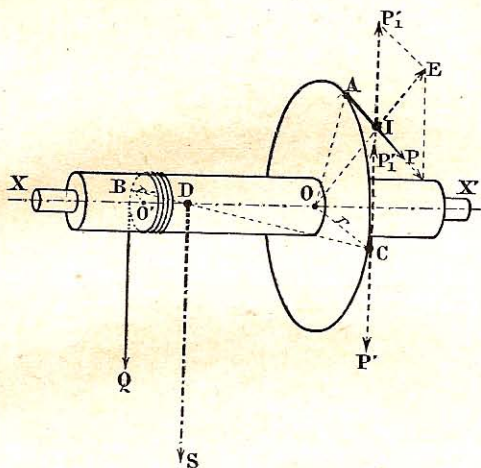


Fig. 147. — Torno simple. — Equilibrio.

Cabrestante. — El cabrestante es un torno de eje vertical, empleado a bordo de los buques (fig. 148).

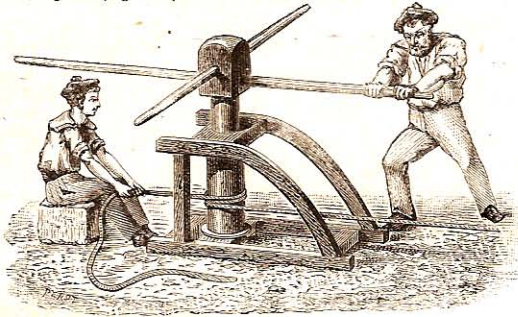


Fig. 148. — Cabrestante de brazos.

En la cabeza del cabrestante están empotradas las *barras* sobre las cuales actúan los marineros para arrollar el cable.

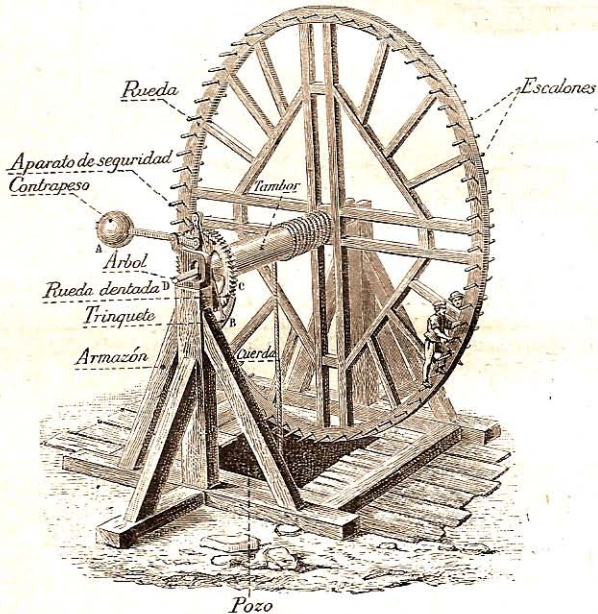


Fig. 149. — Torno de canteros.

159. Torno de los canteros. — El torno de los canteros, o *rueda de clavija*, se pone en movimiento por uno o varios obreros que suben por una gran rueda provista de travesaños (fig. 149).

El torno está provisto de un *aparato de seguridad*, por si llegara a romperse la cuerda. No obrando ya la carga sobre el cilindro, un contrapeso levanta el extremo del árbol e introduce un trinquete B en los dientes de una rueda C; el torno se detiene y no puede girar en vacío.

Equilibrio. — En este aparato la potencia P está representada por el peso de los obreros (fig. 150).

Sean R y r los radios de la rueda de clavijas y del cilindro, α el ángulo EOA.

Cuando hay equilibrio, la resultante encuentra el eje.

La ecuación de equilibrio es :

$$P \times \overline{OC} - Q \times \overline{OB} = 0,$$

o
$$Pr \operatorname{sen} \alpha - Qr' = 0.$$

Luego
$$P = Q \frac{r'}{r \operatorname{sen} \alpha}.$$

Discusión. — El efecto de la potencia sería máximo para $\alpha = 90^\circ$, pero no es prudente que exceda 70° , pues si un movimiento imprevisto del aparato hiciera pasar del punto D, el obrero se expondría a grave accidente.

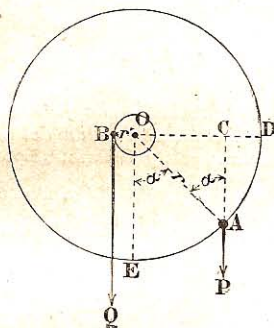


Fig. 150.

Equilibrio del torno de canteros.

160. Torno de engranajes. — Para obtener por medio del torno

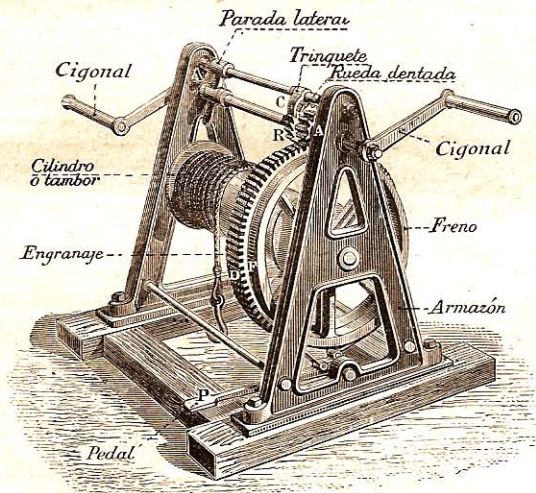


Fig. 151. — Torno de engranajes.

una potencia considerable, sin dar a la rueda dimensiones demasiado grandes, se emplea el *torno de engranajes*.

La potencia obra sobre dos manubrios; mediante de un *piñón* A hace girar una *rueda* D, de mayor diámetro, fija en el cilindro o *tambor* del torno (fig. 151).

Un sistema de seguridad, formado por el *trinquete* C y la *rueda dentada* R, se opone al retroceso de la carga. Para verificar dicho retroceso, se levanta una pieza de seguridad y se empuja el eje de los manubrios para soltar el piñón A. El pedal P y el freno de cinta F sirven para moderar la velocidad.

Equilibrio. — La potencia y la resistencia están en la relación del producto de los radios del piñón y del cilindro al producto de los radios de la rueda y del manubrio.

Estáticamente el aparato se compone de dos tornos sencillos (fig. 152).

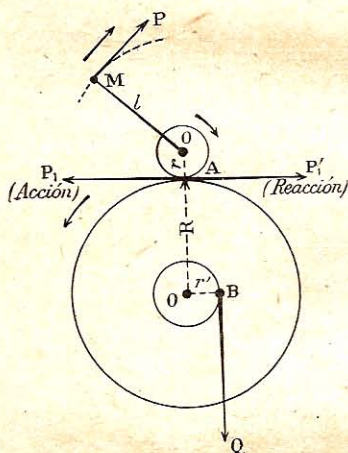


Fig. 152.

Equilibrio del torno de engranajes.

El primero, de eje O, está constituido por el manubrio y el piñón dentado.

Sean P la potencia que obra perpendicularmente al manubrio OM, P'_1 la resistencia opuesta al movimiento del piñón por la reacción de los dientes de la rueda.

Una vez establecido el equilibrio se tiene :

$$\frac{P}{P'_1} = \frac{r}{l}. \quad (1)$$

El segundo torno, de eje O', está constituido por la rueda dentada y el tambor de arrollamiento.

La potencia P_1 es igual a la reacción P'_1 (en valor absoluto).

Se tiene :

$$\frac{P_1 \text{ o } P'_1}{Q} = \frac{r'}{R}. \quad (2)$$

Multiplicando (1) y (2) miembro por miembro :

$$\frac{P}{Q} = \frac{rr'}{Rl}.$$

La potencia es mucho menor que la resistencia.

161. Torno diferencial. — El tambor del *torno diferencial* está formado por dos cilindros de igual eje y radios diferentes (fig. 153).

La cuerda que sostiene la carga Q está arrollada sobre los dos cilindros A y B, pero en sentido contrario; cuando el ramal C se arrolla para elevar la carga, el otro C' se desarrolla en una cantidad menor. La potencia se aplica a uno o a dos manubrios F y G.

Equilibrio. — Los dos ramales de la cuerda soportan cada uno la mitad de la carga Q.

La ecuación de equilibrio es :

$$Pl + \frac{Q}{2}r' - \frac{Q}{2}r = 0,$$

de donde

$$P = \left(\frac{r - r'}{2l} \right) Q.$$

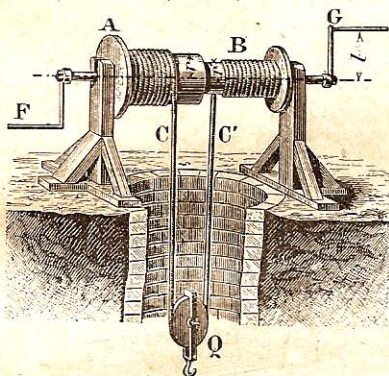


Fig. 153. — Torno diferencial.

Se puede, haciendo $(r - r')$ lo más pequeño posible, realizar gran potencia con poco esfuerzo en los manubrios.

162. Gato. — El gato es una máquina destinada a elevar a poca altura cargas muy pesadas.

Se compone de una cremallera que engrana con un piñón formando cuerpo con una rueda dentada; dicha rueda engrana a su vez con un segundo piñón movido por un manubrio (fig. 154).

Se colocan debajo de la carga los cuernos o el pie de la cremallera.

Equilibrio. — Sean l y R los radios del manubrio y de la rueda, r y r' los de los piñones. La ecuación de equilibrio se obtiene como en el torno de engranajes :

$$P = Q \frac{rr'}{Rl}.$$

OBSERVACIÓN. — En el gato sencillo, en que el piñón del manubrio mueve directamente la cremallera :

$$P = Q \frac{r}{l}.$$

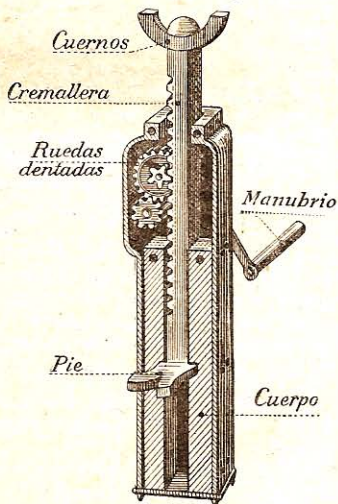


Fig. 154. — Gato de cremallera.

163. Cabria. — La *cabria* es una máquina muy antigua, empleada en las construcciones para elevar materiales; es una combinación del torno y de la polea (fig. 155).

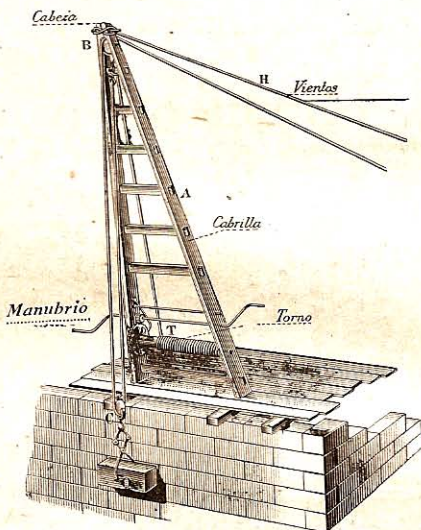


Fig. 155. — Cabria.

La cabria se compone de dos *cabrillas* A unidas por travesaños.

Unas cuerdas o *vientos* la mantienen ligeramente inclinada. En la *cabeza* de la cabria se instala una *polea* B para la cuerda que se enrolla sobre un *torno* T. Se suspende la carga de una polea móvil C cuando se quiera duplicar el efecto de la potencia.

El torno está provisto de una rueda dentada con trinquete de seguridad.

164. Grúa. — Las *grúas* sirven para elevar y transportar pesadas cargas. Son *giratorias* ó de *correderas* según se efectúa el transporte en sentido horizontal por simple rotación del aparato alrededor de un gorrón vertical, o por una rotación combinada con una traslación sobre rieles.

La *grúa giratoria* (fig. 156) comprende un *árbol* vertical, un armazón con torno, un *aguilón* o *flecha* con sus dos tirantes, y las correspondientes poleas.

El árbol vertical descansa en una *quicionera* o *chumacera* y se apoya lateralmente sobre una corona de rodillos E que disminuye el rozamiento cuando gira la grúa.

La de la polea C :

$$P = \frac{S_2}{2}$$

Multiplicando miembro por miembro, se tiene :

$$P = \frac{Q}{2^3}$$

En general,

$$P = \frac{Q}{2^n}$$

3º En un torno de engranajes : el manubrio $l = 30\text{cm}$, un piñón $r = 4\text{cm}$ está acunado sobre su eje, la rueda correspondiente $R = 20\text{cm}$, por último el radio del tambor $r' = 6\text{cm}$. — ¿ Qué potencia habrá que ejercer para levantar 1000kg ?

La potencia
$$P = Q \frac{r r'}{R l} = 1000\text{kg} \times \frac{4 \times 6}{20 \times 30} = 40\text{kg}.$$

4º Los cilindros de un torno diferencial tienen 10cm y 8cm de radio. — ¿ Qué peso podrá levantarse con una potencia de 20kg sobre un manubrio $l = 30\text{cm}$?

La carga
$$Q = \left(\frac{2l}{r - r'} \right) P = \frac{2 \times 30}{10 - 8} \times 20\text{kg} = 600\text{kg}.$$

§ 3. — PLANO INCLINADO. — TORNILLO

166. Equilibrio sobre el plano inclinado. — Un cuerpo grave (S) descansa sin rozamiento sobre un plano inclinado de un ángulo α sobre el horizonte (fig. 157).

Está en equilibrio cuando la resultante de las fuerzas que se le aplican directamente es normal al plano, apoya el cuerpo sobre el plano y pasa por el interior del polígono de sustentación (123).

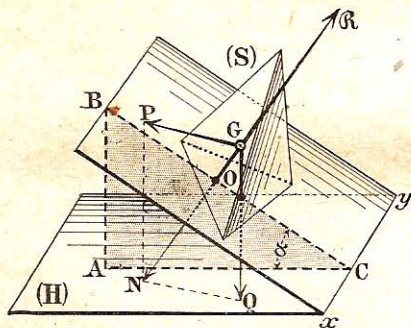


Fig. 157. — Plano inclinado.

El cuerpo no puede estar en equilibrio bajo la acción de su peso Q que no es normal al plano; debe sostenerse por una fuerza P ; Q es la resistencia y P la potencia.

Las fuerzas P y Q tienen una resultante N normal al plano inclinado. Estas tres

fuerzas están en un mismo plano ABC , a la vez vertical y perpendicular al plano inclinado, que corta según la línea de máxima pendiente BC .

Tomemos el plano de las fuerzas como plano de la figura (fig. 158). Sean α la inclinación del plano sobre el horizonte, β el ángulo de la potencia con el plano. Este ángulo, contado desde GE , será positivo encima y negativo debajo.

Determinemos la potencia P que realiza el equilibrio.

Las componentes de la potencia son :

$$E = P \cos \beta, \text{ y } H = P \sin \beta;$$

las de la resistencia :

$$F = Q \sin \alpha \text{ y } D = Q \cos \alpha.$$

1º Establecido el equilibrio ;

$$E = F \text{ o } P \cos \beta = Q \sin \alpha.$$

La potencia

$$P = Q \frac{\sin \alpha}{\cos \beta}. \quad (1)$$

2º Se tiene :

$$N = D - H = Q \cos \alpha - P \sin \beta.$$

Reemplazando P por su valor (1)

$$N = Q \cos \alpha - Q \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \beta}.$$

La presión

$$N = Q \frac{\cos (\alpha + \beta)}{\cos \beta}. \quad (2)$$

Discusión. — La presión N debe apoyar el cuerpo sobre el plano :

$$N = Q \frac{\cos (\alpha + \beta)}{\cos \beta} \geq 0. \quad (3)$$

Ahora bien, $\cos \beta$ es positivo, sino la potencia y la gravedad sumarían su acción para hacer bajar el cuerpo.

$$\text{Así} \quad \cos (\alpha + \beta) \geq 0, \text{ o } -\frac{\pi}{2} < \alpha + \beta \leq \frac{\pi}{2}.$$

No pudiendo variar el ángulo β sino entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2} - \alpha$, la potencia puede obrar sólo en el ángulo DGM .

Casos particulares. — 1º $\beta = 0$: la potencia es paralela al plano inclinado.

$$\text{Entonces} \quad P = Q \sin \alpha = Q \frac{h}{l}, \text{ y } N = Q \cos \alpha = Q \frac{b}{l};$$

l , h y b son la longitud BC , la altura AB y la base AC del plano inclinado. La potencia P es mínima; es la dirección más favorable a la potencia.

2º $\beta = -\alpha$: la potencia es horizontal.

$$\text{Entonces} \quad P = Q \operatorname{tg} \alpha, \text{ y } N = \frac{Q}{\cos \alpha}.$$

3º $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$: la potencia es vertical.

$$\text{En este caso} \quad P = Q \text{ y } N = 0.$$

La potencia no apoya el cuerpo contra el plano.

4º $\beta = -\frac{\pi}{2}$: la potencia es normal al plano.

La potencia y la presión se hacen infinitas : ninguna fuerza, obrando normalmente sobre un plano inclinado pulimentado, puede impedir que un cuerpo deslice por dicho plano.

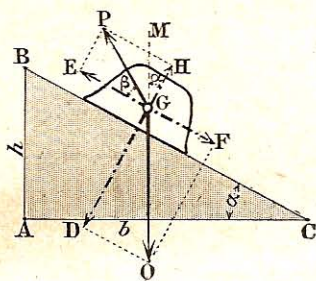


Fig. 158.

Equilibrio sobre el plano inclinado.

167. Cuña. — La cuña es un doble plano inclinado que sirve para separar o dividir los cuerpos entre los cuales se introduce (fig. 159).

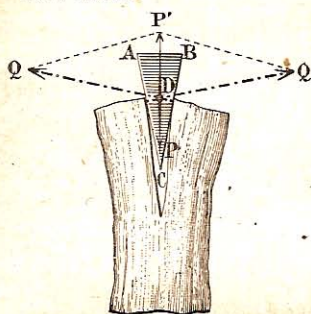


Fig. 159. — La cuña, doble plano inclinado.

Equilibrio. — Supongamos que las presiones Q, Q , normales a las caras de la cuña se apliquen en su punto de concurso D . Estas dos fuerzas tienen una resultante P' , que ha de ser perpendicular a la cabeza de la cuña, y estar directamente opuesta a la potencia P .

Los triángulos $P'DQ$ y ABC , semejantes porque tienen sus lados perpendiculares, dan la proporción:

$$\frac{P}{Q} = \frac{AB}{BC}$$

168. Tornillo. — El tornillo es una máquina simple sujeta a un movimiento helicoidal alrededor de un eje (33).

Ejemplo: el gato de tornillo (fig. 160); la prensa de copiar (fig. 25).

Equilibrio. — Para que un tornillo esté en equilibrio, es preciso y suficiente que la potencia y la resistencia estén en la misma relación que el paso del tornillo y la circunferencia descrita por el extremo de la palanca de la potencia.



Fig. 160. — Gato de tornillo.

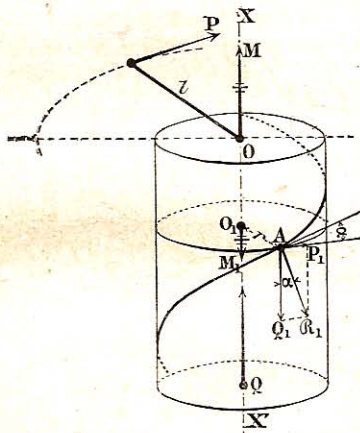


Fig. 161. — Equilibrio del tornillo.

Quando el tornillo está en equilibrio, la potencia P , la resistencia Q y el conjunto de las reacciones R_1 , para todos los puntos de las roscas, forman un sistema de fuerzas en equilibrio.

Descompongamos R_1 en dos fuerzas rectangulares (fig. 161):

$$Q_1 = R_1 \cos \alpha \quad \text{y} \quad P_1 = R_1 \sin \alpha$$

El conjunto de las fuerzas Q_1 equilibra a la resistencia Q .

$$Q = \sum Q_1 = \cos \alpha \cdot \sum R_1$$

La fuerza P_1 tiende a hacer girar el tornillo en sentido inverso de la potencia con un momento de rotación (vector O_1M_1):

$$\mathcal{M} \cdot P_1 = P_1 r;$$

y el conjunto de los vectores O_1M_1 tiene una resultante igual y de sentido contrario al vector OM , es decir:

$$Pl = \Sigma \mathcal{M} \cdot P_1 = r \operatorname{sen} \alpha \cdot \Sigma \mathcal{R}_1. \quad (2)$$

La eliminación de \mathcal{R}_1 entre (1) y (2) da:

$$Pl = Qr \operatorname{tg} \alpha = Qr \frac{h}{2\pi r}.$$

$$\text{Luego} \quad \frac{P}{Q} = \frac{h}{2\pi l}. \quad (3)$$

169. Rozamiento de deslizamiento. — Fuerza de rozamiento. — Es la resistencia que se opone al movimiento de dos superficies una sobre otra. Está dirigida en sentido contrario al movimiento.

Esta resistencia proviene de las asperezas que existen en la superficie de los cuerpos, aun de los mejor pulimentados, y de las deformaciones por compresión que se producen aun en los cuerpos más duros.

Hay dos clases de rozamiento: *el rozamiento de deslizamiento y el rozamiento de rodadura*. No estudiaremos sino el primero.

Experimentos de Coulomb. — Las leyes del rozamiento han sido descubiertas por Coulomb en 1781; sus experimentos han sido repetidos por el general Morin, en 1831, con métodos más exactos.

Una mesa A, perfectamente horizontal, lleva una guía B por la que se desliza una caja C, cargada con pesas conocidas y unida a un platillo H (fig. 162).

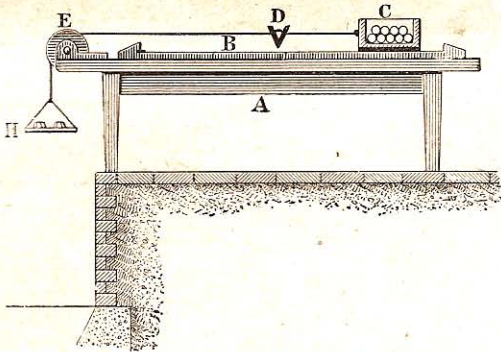


Fig. 162. — Experimentos sobre el rozamiento de deslizamiento.

Se carga el platillo H hasta que la caja esté a punto de deslizarse. Notaba entonces Coulomb el tiempo que invertía la caja para recorrer

una longitud determinada. Morin medía directamente las fuerzas por medio de un dinamómetro D.

Numerosos experimentos se han realizado modificando la carga, el lubricante y las superficies de rozamiento.

170. Leyes del rozamiento de deslizamiento. — Son estas leyes en número de cinco:

1º La fuerza del rozamiento de deslizamiento es proporcional a la presión normal;

2º Es independiente de la extensión de las superficies en contacto;

3º Es independiente de la velocidad durante el movimiento;

4º Depende de la naturaleza y de la pulimentación de las superficies en contacto, así como de los lubricantes;

5º El rozamiento al arrancar es generalmente mayor que el rozamiento durante la marcha.

Coefficiente y ángulo de rozamiento. — Sean N la presión normal y F la fuerza de rozamiento.

La primera ley se traduce por la relación:

$$f = \frac{F}{N},$$

llamándose f coeficiente de rozamiento.

Sentado que:

$$f = \operatorname{tg} \varphi,$$

el ángulo agudo φ es el ángulo de rozamiento.

171. Equilibrio sobre el plano inclinado con rozamiento. — Sea un punto material M colocado sobre un plano rugoso ABC , inclinado de un ángulo α (fig. 163). Su peso Q tiene dos componentes: una N normal,

otra T dirigida según la línea de máxima pendiente BC .

Si el plano fuera perfectamente liso, la fuerza T obligaría el punto a bajar a lo largo de BC , pero sobre el plano rugoso, una fuerza de rozamiento F , dirigida según MB , se opone a dicho descenso:

$$F = N \cdot \operatorname{tg} \varphi \quad (170).$$

El equilibrio subsiste mientras:

$$T \leq F \quad \text{o} \quad \frac{T}{N} \leq f.$$

La condición de equilibrio es pues:

$$\operatorname{tg} \alpha \leq \operatorname{tg} \varphi \quad \text{o} \quad \alpha \leq \varphi.$$

Discusión. — Si $\alpha < \varphi$, hay equilibrio.

Si $\alpha = \varphi$, el punto está a punto de bajar.

Si $\alpha > \varphi$, el punto desliza.

172. Equilibrio del tornillo con rozamiento. — Sea un tornillo en equilibrio. Un punto A de las roscas está sometido, por parte de

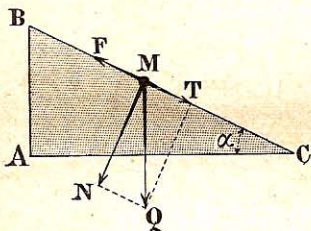


Fig. 163.

Equilibrio sobre el plano inclinado
(con rozamiento).

la tuerca, a una reacción que no es normal a la superficie de las roscas. Esta reacción tiene por componentes: la fuerza N_1 normal y la fuerza $F = fN_1$, tangente a dicha superficie, dirigida en sentido inverso al del movimiento del tornillo (fig. 164).

Cuando el tornillo está en equilibrio, la potencia P , la resistencia Q y el conjunto de las reacciones N_1 y fN_1 para todos los puntos de las roscas, forman un sistema de fuerzas en equilibrio.

Discurriendo como anteriormente (468), se pueden escribir las dos ecuaciones:

$$Q = \Sigma N_1 \cos \alpha - \Sigma f N_1 \sin \alpha = (\cos \alpha - f \sin \alpha) \Sigma N_1, \quad (1)$$

y
$$Pl = \Sigma N_1 \sin \alpha \cdot r + \Sigma f N_1 \cos \alpha \cdot r = r(\sin \alpha + f \cos \alpha) \Sigma N_1. \quad (2)$$

La eliminación de ΣN_1 entre (1) y (2) da:

$$\frac{Pl}{Q} = \frac{(\sin \alpha + f \cos \alpha)r}{\cos \alpha - f \sin \alpha} = \frac{(\operatorname{tg} \alpha + f)r}{1 - f \operatorname{tg} \alpha}. \quad (3)$$

Ahora bien, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{2\pi r}$;

la ecuación (3) se convierte en:

$$\frac{P}{Q} = \frac{\left(\frac{h}{2\pi r} + f\right)r}{\left(1 - f\frac{h}{2\pi r}\right)l} = \frac{(h + 2\pi r f)r}{(2\pi r - fh)l}. \quad (4)$$

La ecuación (4) puede escribirse:

$$\frac{P}{Q} = \frac{(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \varphi)r}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \varphi} \cdot \frac{r}{l} = \frac{r}{l} \operatorname{tg}(\alpha + \varphi). \quad (5)$$

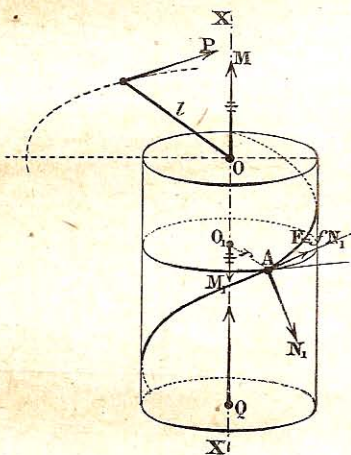


Fig. 164. — Equilibrio del tornillo (con rozamiento).

173. Problemas sobre el plano inclinado y el tornillo. — 1º Un vagón que pesa 3^r está en equilibrio sobre un plano inclinado de pendiente $\frac{h}{l} = \frac{15}{100}$. — ¿Cuáles son la potencia paralela al plano y la presión normal?

La potencia
$$P = Q \frac{h}{l} = 3000 \text{kg} \times \frac{15}{100} = 450 \text{kg}.$$

La presión normal

$$N = Q \frac{b}{l} = 3000 \text{kg} \times \frac{\sqrt{100^2 - 15^2}}{100} = 3000 \text{kg} \times 0,988 = 2964 \text{kg}.$$

2º Sobre una cuña, cuya sección recta es un triángulo isósceles ABC ($AB=1$, $BC=10$), se ejerce un esfuerzo $P=100 \text{kg}$. — Determinese la presión lateral de separación.

La presión lateral

$$Q = P \times \frac{BC}{AB} = 100 \text{kg} \times 10 = 1000 \text{kg}.$$

3º Un coche de un peso de 15^r se levanta con un gato; el paso del tornillo $h=20^m$, su radio medio $r=50^m$, la barra de maniobra $l=2^m$ — ¿Qué potencia habrá que ejercer :

1º Si no se tiene en cuenta el rozamiento; — 2º Si el rozamiento $f=0,10$?

1º Despreciando el rozamiento, la potencia que hay que ejercer es :

$$P = Q \frac{h}{2\pi l} = 15000^{\text{kg}} \times \frac{20}{12566} = \text{unos } 24^{\text{kg}}.$$

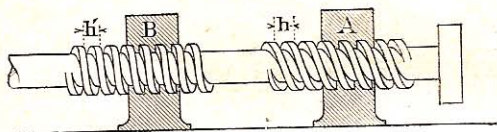
2º Teniendo en cuenta el rozamiento :

$$P = Q \frac{(h + 2\pi r f)}{(2\pi r - fh)} \cdot \frac{r}{l} = 15000^{\text{kg}} \times \frac{20 + 2\pi \times 50 \times 0,10}{2\pi \times 50 - 0,10 \times 20} \times \frac{50}{2000}.$$

$$o \quad P = 15000^{\text{kg}} \times \frac{51,4}{312,2} \times \frac{1}{40} = \text{unos } 62^{\text{kg}}.$$

La relación $\frac{24}{62} = 0,38$ es el *rendimiento* del tornillo.

4º El tornillo diferencial se compone de dos tornillos de paso h y h' ($h > h'$) — ¿Cuál es el valor de la potencia P que equilibra una resistencia $Q=40000^{\text{kg}}$, cuando $l=1^m$, $h=20^m$, $h'=16^m$, y se desprecia el rozamiento?



El paso de un tornillo diferencial es $h-h'$, y la ecuación de equilibrio se convierte en :

$$\frac{P}{Q} = \frac{h-h'}{2\pi l}.$$

La potencia vale pues :

$$P = Q \frac{h-h'}{2\pi l} = 40000^{\text{kg}} \times \frac{20-16}{2\pi \times 1000} = \text{unos } 25^{\text{kg}}.$$

TERCERA PARTE

DINÁMICA

CAPÍTULO I

DINÁMICA DEL PUNTO MATERIAL

SUMARIO

§ 1. *Trabajo. Fuerza viva* : Unidad de trabajo. — Trabajo de las fuerzas ; diagrama del trabajo. — Teorema de la fuerza viva.

§ 2. *Movimiento de un punto material* : Movimiento vertical y parabólico de los proyectiles. — Péndulo sencillo o circular. — Fuerza centrífuga. — Movimiento sobre el plano inclinado.

§ 1. — TRABAJO. — FUERZA VIVA

174. Noción de trabajo. — *La Dinámica es el estudio de las relaciones que existen entre las fuerzas y los movimientos que producen.*

Una fuerza se aprecia por el trabajo que produce.

Ejemplo. — Si un caballo no consigue, a pesar de sus esfuerzos, arrastrar una carga, la fuerza que desarrolla es inútil ; si, por lo contrario, un buey la mueve, produce trabajo útil.

Así pues, *toda fuerza que vence una resistencia produce un trabajo.*

El trabajo mecánico comprende dos elementos : *la intensidad del esfuerzo* ejercido y *el camino recorrido*. El trabajo será doble, triple, etc..., si lo son el esfuerzo o el camino recorrido.

El trabajo de una fuerza es pues proporcional al producto de su intensidad por el camino que hace recorrer a un móvil en su propia dirección.

175. Unidades de trabajo. — El trabajo se expresa por un número que depende de las unidades de fuerza y de longitud elegidas. Es independiente del tiempo en que se realiza, mientras que la potencia mecánica es el trabajo efectuado en la unidad de tiempo.

1º En el sistema métrico (87), la unidad de trabajo es el **kilográmetro** o trabajo necesario para elevar 1 kilogramo a 1 metro de altura. La unidad de potencia mecánica es el **caballo-vapor**: trabajo de 75 kilográmetros por segundo. Se representa abreviadamente por HP o CV.

2º En el sistema de las unidades C. G. S. (88), la unidad de trabajo es el **ergio** o trabajo producido por una fuerza de una dina, que hace recorrer a un móvil un espacio de 1 centímetro en su dirección.

Dicha unidad es muy pequeña. En efecto 1 kilogramo = 981 000 dinas, y 1 metro = 100 cm., por consiguiente, 1 kilográmetro = 98100000 o $(9,81 \times 10^7)$ ergios.

En la práctica se emplea el **julio**, que vale 10^7 ergios.

1 kilográmetro = 9,81 julios y 1 julio = $0,102 \text{ kgm}$.

En el sistema C. G. S. la unidad de potencia mecánica es el **vatio**, que es el trabajo de 1 julio por segundo.

1 caballo-vapor = 736 vatios.

176. Trabajo de una fuerza constante. — Sea F una fuerza constante, aplicada a un móvil M que se desplaza siguiendo una trayectoria rectilínea $X'X$ la cual forma un ángulo α con la dirección de la fuerza (fig. 165).

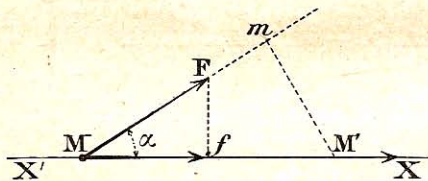


Fig. 165. — Trabajo de una fuerza constante. Trayectoria rectilínea.

Supongamos que el móvil haya recorrido en su trayectoria el camino MM' . Dicho camino, proyectado según la dirección de la fuerza es:

$$\overline{Mm} = \overline{MM'} \cdot \cos \alpha.$$

El trabajo

$$\mathfrak{E}F = F \cdot \overline{MM'} \cos \alpha. \quad (1)$$

Si $\alpha = 0$, $\mathfrak{E}F = F \cdot \overline{MM'}$; el trabajo es igual al producto de la fuerza por el camino recorrido.

Si $\alpha < 90^\circ$, $\mathfrak{E}F > 0$; el trabajo es *motor*.

Si $\alpha > 90^\circ$, $\mathfrak{E}F < 0$; el trabajo es *resistente*.

Si $\alpha = 90^\circ$, $\mathfrak{E}F = 0$; el trabajo es *nulo*.

Es el caso de un punto material que se mueve sobre un plano horizontal ; el trabajo de la gravedad es nulo.

El trabajo es igualmente nulo cuando un móvil está animado de un movimiento uniforme, pues entonces $F = 0$.

Observación. — La ecuación (1) puede escribirse :

$$\mathfrak{E}F = F \cos \alpha \cdot \overline{MM'} = f \cdot \overline{MM'}$$

El trabajo es pues igual al producto de la fuerza por la proyección del camino sobre la dirección de la fuerza, o bien al producto del camino por la proyección de la fuerza sobre la trayectoria.

177. Trabajo de una fuerza variable. — Sea F una fuerza, variable en intensidad y dirección, que obra sobre un móvil M obligado a recorrer una trayectoria cualquiera (fig. 166).

Descompongamos esta trayectoria en *arcos elementales* Δs , considerados como *rectilíneos*. Supongamos la fuerza constante en magnitud y dirección durante el recorrido de cada uno de los elementos de la trayectoria.

Trabajo elemental. — El trabajo τ verificado por la fuerza F , durante cada uno de los recorridos Δs , se llama *trabajo elemental* :

$$\tau = F \cdot \Delta s \cos (F, \Delta s) = f \cdot \Delta s,$$

cuando Δs tiende hacia cero.

Trabajo total. — El *trabajo total* de la fuerza F es la suma de los trabajos elementales de dicha fuerza, para todos los movimientos sucesivos que constituyen el desplazamiento total MM' del punto M sobre la trayectoria.

Sean F_1, F_2, \dots, F_n , los valores sucesivos de la fuerza variable F ; f_1, f_2, \dots, f_n , las proyecciones de la fuerza variable sobre las tangentes sucesivas de la trayectoria.

El trabajo total es :

$$\mathfrak{E}F = \Sigma \tau = f_1 \cdot \overline{MM_1} + f_2 \cdot \overline{M_1M_2} + \dots + f_n \cdot \overline{M_{n-1}M'}$$

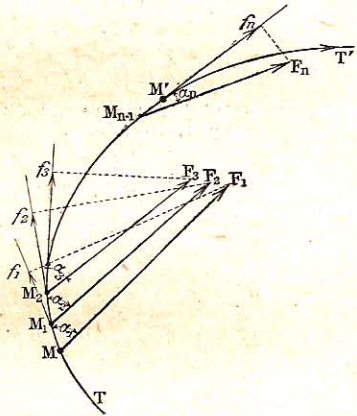


Fig. 166. — Trabajo de una fuerza variable.

178. Casos particulares. — Fuerza constante y trayectoria curvilínea. — Sea una

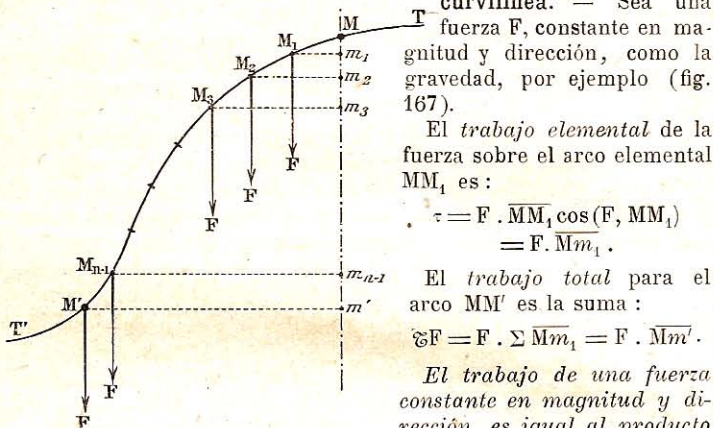


Fig. 167. — Trabajo de una fuerza constante. Trayectoria curvilínea.

fuerza F , constante en magnitud y dirección, como la gravedad, por ejemplo (fig. 167).

El trabajo elemental de la fuerza sobre el arco elemental MM_1 es:

$$\tau = F \cdot \overline{MM_1} \cos(F, MM_1) = F \cdot \overline{Mm_1}.$$

El trabajo total para el arco MM' es la suma:

$$\oint F = F \cdot \Sigma \overline{Mm_1} = F \cdot \overline{Mm'}.$$

El trabajo de una fuerza constante en magnitud y dirección, es igual al producto de la fuerza por la proyección del camino sobre la dirección de la fuerza.

Fuerza tangencial. — Sea una fuerza F constante en magnitud, que permanece siempre tangente a la trayectoria TT' del móvil (fig. 168), como la potencia en un torno o cabrestante.

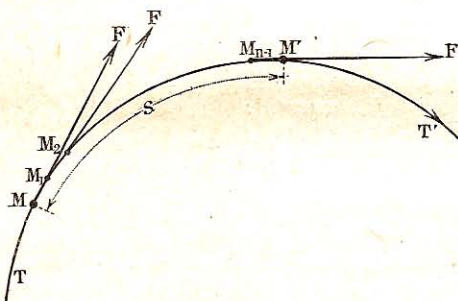


Fig. 168. — Trabajo de una fuerza tangencial.

El trabajo total es:

$$\oint F = F \cdot \Sigma \overline{MM_1} = F \cdot \overline{MM'} = F \times s.$$

El trabajo es igual al producto de la fuerza tangencial por el camino recorrido.

179. Diagrama del trabajo. — Se determina el trabajo total de una fuerza variable por medio de un *diagrama*.

Sobre dos ejes rectangulares Mx y My (fig. 169), se llevan :

1º En abscisas, las longitudes de los arcos elementales

$$MM_1, M_1M_2, \dots, M_{n-1}M';$$

2º En ordenadas, las proyecciones f_1, f_2, \dots, f_n de la fuerza variable.

Las superficies de los rectángulos $MAA'M_1, M_1BB'M_2, \dots, M_{n-1}JJ'M'$, representan los trabajos elementales $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$.

Cuando las abscisas disminuyen indefinidamente y tienden hacia

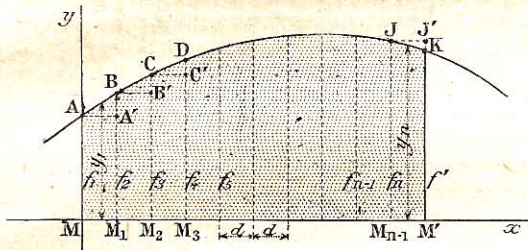


Fig. 169. — Diagrama del trabajo de una fuerza variable.

zero, la suma de las áreas de los rectángulos tiene por límite el área de la superficie $MAB \dots JKM'$, en la cual las ordenadas MA y $M'K$ son las proyecciones de la fuerza variable sobre las tangentes a la trayectoria en los puntos M y M' .

De modo que el *trabajo total* : $\mathfrak{E}F = \Sigma \tau$, tiene por medida el área de la superficie $MAB \dots JKM'$.

Fórmulas de Simpson y de los trapecios. — Se determina esta superficie :

1º Por la fórmula de Simpson.

$$S = \mathfrak{E}F = \frac{d}{3} [f_1 + f' + 4(f_2 + f_4 + \dots + f_n) + 2(f_3 + f_5 + \dots + f_{n-1})].$$

2º Por la fórmula de los trapecios, usual en la industria. Cada superficie, tal como $MAA'M_1$, se asimila a un trapecio de altura MM_1 y de base media $y_1 = \frac{f_1 + f_2}{2}$.

$$\text{De donde} \quad S = \mathfrak{E}F = d(y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_n).$$

180. Trabajo de una resultante. — El trabajo de la resultante de un sistema de fuerzas para un desplazamiento cualquiera es igual a la suma algebraica de los trabajos de las componentes para dicho desplazamiento.

Sea, en el instante t , un sistema de fuerzas F_1, F_2, \dots, F_n (constantes o variables), que obran simultáneamente sobre un punto material M sujeto a recorrer una trayectoria; R es la resultante del sistema.

Para un desplazamiento elemental MM_1 , la proyección de la resultante es igual a la suma algebraica de las proyecciones de las componentes (6); luego :

$$R \cos (R, MM_1) = F_1 \cos (F_1, MM_1) + \dots + F_n \cos (F_n, MM_1)$$

Multiplicando por MM_1 , se obtiene :

$$\tau R = \tau F_1 + \dots + \tau F_n = \Sigma \tau F_i.$$

Durante un desplazamiento determinado MM' , la igualdad de los trabajos se verifica para cada desplazamiento elemental; el trabajo total es pues :

$$\mathfrak{E}R = \mathfrak{E}F_1 + \dots + \mathfrak{E}F_n = \Sigma \mathfrak{E}F_i.$$

181. Fuerza viva de un punto material. — Definición. — Se llama fuerza viva de un punto material en movimiento el producto de su masa por el cuadrado de su velocidad.

Su expresión es : mv^2 .

La energía cinética, o potencia viva de un punto material, es su semifuerza viva :

$$\frac{1}{2} mv^2.$$

Teorema. — El trabajo total de las fuerzas aplicadas a un punto material, durante un tiempo determinado, es igual a la variación de la semi-fuerza viva de dicho punto durante dicho tiempo.

El teorema se traduce por :

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 ;$$

fórmula en que v y v_0 son las velocidades final e inicial del punto material.

Consideremos los casos siguientes :

182. Caso de una fuerza constante. — 1º La fuerza tiene la misma dirección que el camino recorrido.

Sean F la fuerza constante aplicada a un punto de masa m ; v_0 y v las velocidades inicial y final del móvil en M y M' .

El movimiento es uniformemente variado (81), luego :

$$\overline{MM'} = v_0 t + \frac{1}{2} \gamma t^2, \quad \text{y} \quad v = v_0 + \gamma t.$$

Por consiguiente :

$$v^2 - v_0^2 = 2v_0 \gamma t + \gamma^2 t^2 = 2\gamma \left(v_0 t + \frac{\gamma t^2}{2} \right) = 2\gamma \cdot \overline{MM'}.$$

De donde $\frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = m\gamma \cdot \overline{MM'} = F \cdot \overline{MM'} = \mathfrak{E}F$.

2º La fuerza tiene una dirección diferente del camino recorrido.

Proyectemos la fuerza F : 1º sobre la dirección del camino recorrido; 2º perpendicularmente a dicha dirección.

La primera fuerza proyectada, $F \cos \alpha$, produce un trabajo

$$F \cos \alpha \overline{MM'} = \mathfrak{E}F.$$

La segunda no da ningún trabajo (176).

Reemplacemos, en la demostración anterior, F y γ por $F \cos \alpha$ y $\gamma \cos \alpha$; se encuentra también:

$$\frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = F \cos \alpha \cdot \overline{MM'} = \mathfrak{E}F.$$

Caso de la gravedad. — La atracción terrestre sobre los cuerpos es una fuerza constante (83). Cuando un móvil grave cae, sus velocidades inicial y final están ligadas con la altura de caída por la relación

$$v^2 - v_0^2 = 2gh \quad (23).$$

De donde
$$\frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = mgh = P \cdot h = \mathfrak{E}P.$$

Este teorema origina numerosas aplicaciones.

183. Caso de una fuerza variable. — Sea F una fuerza variable en magnitud y dirección. Descompongamos el tiempo t en elementos $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$, bastante pequeños para que la fuerza pueda considerarse como constante durante cada uno de ellos.

Sean F_1, F_2, \dots, F_n los valores sucesivos de la fuerza variable;

$\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ los trabajos elementales correspondientes;

y v_1, v_2, \dots, v_n las velocidades finales en los tiempos $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ (la velocidad final de cada elemento será la velocidad inicial del elemento siguiente).

Para el tiempo elemental θ_1 :
$$\tau_1 = \frac{1}{2} mv_1^2 - \frac{1}{2} mv_0^2,$$

— — — θ_2 :
$$\tau_2 = \frac{1}{2} mv_2^2 - \frac{1}{2} mv_1^2,$$

— — — θ_n :
$$\tau_n = \frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_{n-1}^2.$$

Sumando miembro a miembro (177):

$$\mathfrak{E}F = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n = \frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2.$$

184. Caso de una resultante. — El trabajo de la resultante de un sistema de fuerzas es igual a la suma de los trabajos de las componentes (180). Basta pues aplicar el teorema a la resultante, fuerza única constante o variable:

$$\mathfrak{E}R = \Sigma \mathfrak{E}F_i = \frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2.$$

185. Fuerza viva de un sistema de puntos materiales.

Teorema general. — *En un sistema de puntos materiales, la suma algebraica de los trabajos de todas las fuerzas que obran sobre los diferentes puntos, durante un tiempo determinado, es igual a la suma algebraica de las variaciones de las semi-fuerzas vivas de todos los puntos del sistema durante el mismo tiempo.*

Sea un sistema de puntos materiales de masas m_1, m_2, \dots, m_n . Cada uno de dichos puntos puede ser considerado como libre, a condición de agregar las fuerzas de enlace.

Sean R_1, R_2, \dots, R_n , las resultantes de las fuerzas directas y de enlace por cada uno de los puntos materiales.

Si v_1 y v_{01}, v_2 y v_{02}, \dots, v_n y v_{0n} son las velocidades finales e iniciales de los puntos, se tendrá para cada uno de ellos :

$$\mathfrak{R}_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 v_{01}^2,$$

$$\mathfrak{R}_2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} m_2 v_{02}^2,$$

$$\mathfrak{R}_n = \frac{1}{2} m_n v_n^2 - \frac{1}{2} m_n v_{0n}^2.$$

Sumando miembro a miembro :

$$\Sigma \mathfrak{R}_i = \frac{1}{2} \Sigma m_i v_i^2 - \frac{1}{2} \Sigma m_i v_{0i}^2.$$

§ 2. — MOVIMIENTO DE UN PUNTO MATERIAL

186. Movimiento vertical de un punto material en el vacío. — Sea un móvil, de peso P , lanzado verticalmente de abajo arriba con una velocidad inicial v_0 ; el sentido positivo del movimiento es $x'x$, su origen es el punto O (fig. 170).

En el tiempo t , el móvil está en M , a la distancia x del origen; posee una velocidad v y una aceleración γ , que se trata de determinar.

La única fuerza es la gravedad o peso del cuerpo $P = mg$, que se opone a la subida del móvil. El trabajo de la gravedad es pues negativo, y se tiene (182):

$$\mathfrak{R} = -Px = -mgx = \frac{1}{2} m (v^2 - v_0^2).$$

$$\text{Por consiguiente, } v^2 = v_0^2 - 2gx.$$

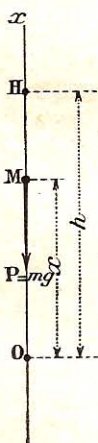


Fig. 170.
Movimiento vertical
de un móvil.

El movimiento del proyectil es *uniformemente retardado* (23), y las ecuaciones del movimiento son :

$$\gamma = -g; \quad (1)$$

$$v = v_0 - gt; \quad (2)$$

$$x = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2. \quad (3)$$

Altura de ascensión. — El trabajo es máximo, en valor absoluto, con x o para $v=0$; después del tiempo de ascensión

$$t = \frac{v_0}{g}.$$

La altura máxima es pues : $h = \frac{v_0^2}{2g}$.

En dicho instante el movimiento ascendente termina, el móvil empieza a bajar con movimiento *uniformemente acelerado* en el sentido negativo xx' .

187. Movimiento parabólico de un punto material en el vacío. — El punto está solicitado por su peso $P = mg$, pero la velocidad inicial v_0 forma un ángulo α con el horizonte Ox (fig. 171).

En el tiempo t , el móvil está en M . El peso P tiene por componentes :

$$X = 0 \quad \text{e} \quad Y = P.$$

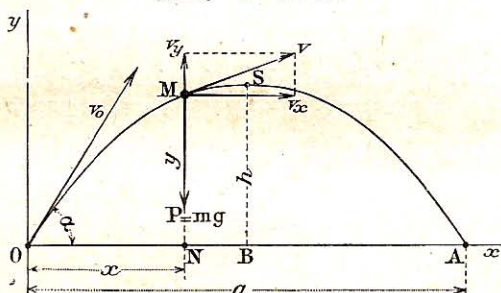


Fig. 171. — Movimiento parabólico de un proyectil.

En virtud de la independencia de los efectos de las fuerzas simultáneas (89), el movimiento del punto M es resultante de los dos movimientos según la horizontal y según la vertical.

Ahora bien, el primero (puesto que $X=0$), es *uniforme*, y el segundo (puesto que Y se opone a la ascensión), es *uniformemente retardado*.

Se puede pues escribir :

1º Para las aceleraciones :

$$\gamma_x = 0 \quad \text{y} \quad \gamma_y = -g. \quad (1)$$

2º Para las velocidades :

$$v_x = v_0 \cos \alpha \quad \text{y} \quad v_y = v_0 \sin \alpha - gt ; \quad (2)$$

pues las componentes de la velocidad inicial v_0 son :

$$v_0 \cos \alpha \quad \text{y} \quad v_0 \sin \alpha .$$

3º Para los espacios :

$$\text{y} \quad \left. \begin{aligned} x &= v_0 t \cos \alpha, \\ y &= v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

pues el espacio inicial, para $t=0$ es nulo :

$$x=0, \quad y=0.$$

Trayectoria. — Eliminando t entre las dos ecuaciones (3) :

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} .$$

La trayectoria es una parábola de eje vertical BS, y de concavidad vuelta hacia abajo (coeficiente de x^2 negativo).

188. Altura y amplitud del tiro. — La gravedad gasta un trabajo negativo para detener la ascensión del móvil :

$$\mathfrak{E} = - P y = \frac{1}{2} m (v^2 - v_0^2) .$$

Altura del tiro. — El trabajo será máximo, en valor absoluto con el mínimo de v que se verifica para $v_y=0$, puesto que v_x es constante.

En dicho momento y es máximo, y el móvil está en S, vértice de la parábola ; la ordenada BS es la altura del tiro.

Ahora bien, de $v_y=0$ se deduce el tiempo de ascensión :

$$t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} ;$$

de donde la altura del tiro :

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} .$$

Amplitud del tiro. — El trabajo será nulo para $y=0$,

o para

$$v = v_0 .$$

Esta condición se realiza en el punto O en que el móvil parte del suelo, y para el punto A en que vuelve a encontrarlo.

En virtud de la simetría, el móvil M pasa, al bajar, por las mismas velocidades que al subir. El trabajo absorbido en la subida se restituye íntegramente en la bajada.

La abscisa OA es la *amplitud del tiro*, recorrida en un tiempo

$$2t = \frac{2v_0 \operatorname{sen} \alpha}{g}.$$

La amplitud $a = \frac{2v_0^2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{g}.$

Observación — La resistencia que el aire opone al movimiento de los proyectiles modifica la forma de la trayectoria; la altura y la amplitud del tiro disminuyen, pues la curva de descenso se aproxima rápidamente a la vertical.

189. Problema. Parábola de seguridad. — *¿Qué ángulo debe formar con la horizontal un proyectil, lanzado con una velocidad v_0 para que alcance un punto cuyas coordenadas son a y b?*

Las coordenadas satisfacen a la ecuación de la trayectoria :

$$b = a \operatorname{tg} \alpha - \frac{ga^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} = a \operatorname{tg} \alpha - \frac{a^2}{4h} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha),$$

poniendo $h = \frac{v_0^2}{2g}.$

De donde la ecuación

$$a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha - 4ha \operatorname{tg} \alpha + 4hb + a^2 = 0. \quad (1)$$

La condición de realidad de las raíces es :

$$4h^2 - 4hb - a^2 \geq 0. \quad (2)$$

Parábola de seguridad. — Construyamos la parábola :

$$4h^2 - 4hy - x^2 = 0, \quad (3)$$

de eje Oy, cuya concavidad está vuelta hacia abajo, y que encuentra

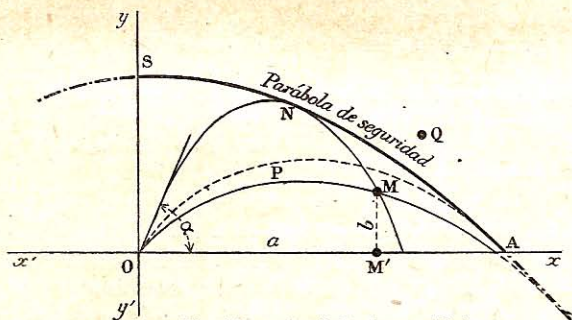


Fig. 172. — Parábola de seguridad.

el eje de las x en el punto A de abscisa $OA = \frac{v_0^2}{2g}$. La ordenada del

vértice S será : $OS = h = \frac{v_0^2}{2g}$ (fig. 172).

Dicha parábola SNA divide el plano en dos regiones.

La condición (2) muestra pone de manifiesto que los puntos de esta parábola y los puntos interiores, pueden ser alcanzados por el proyectil, mientras que los puntos exteriores no pueden serlo: de aquí su nombre de *parábola de seguridad*.

Para todo punto interior M, la ecuación (3) tiene dos raíces α' y α'' ($\alpha' < \alpha''$). El ángulo α' corresponde a la *parábola de inversión* OPM del tiro directo, y el ángulo α'' a la *parábola de aplastamiento* OMN del tiro indirecto. Ambas parábolas son tangentes a la parábola de seguridad.

190. Péndulo simple o circular. — Movimiento pendular.

— El péndulo simple es un punto grave M que oscila en el vacío, alrededor de un punto fijo por medio de un hilo inextensible y sin peso.

Su posición de equilibrio es según la vertical OV (fig. 173).

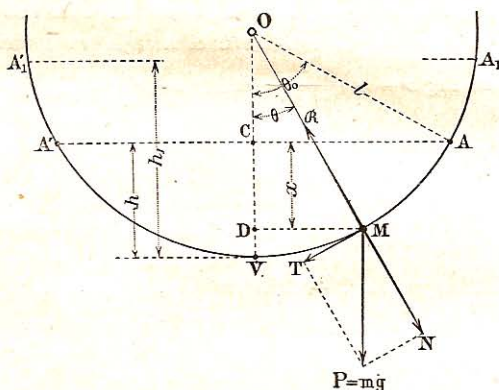


Fig. 173. — Movimiento sobre una circunferencia. Péndulo simple.

Apartado el péndulo de dicha posición, y abandonado, sin velocidad inicial, en el punto A, el péndulo desciende, con velocidad creciente, hasta el punto V, el más bajo de la curva, adonde llega con una velocidad

$$v = \sqrt{2gh}$$

(h es la distancia vertical de los puntos A y V).

En virtud de dicha velocidad, el móvil continúa su movimiento y se eleva hasta A'. Los puntos A y A' están en una misma horizontal.

En efecto, el trabajo positivo de la gravedad durante el recorrido AV es Ph; el trabajo negativo durante el recorrido VA' es, en valor absoluto, Ph' (178).

Ahora bien, el trabajo total $\mathcal{E} = 0$, puesto que la velocidad inicial en A y la velocidad final en A' son nulas:

$$Ph - Ph' = 0;$$

de donde

$$h = h'.$$

El punto A' está pues en la horizontal del punto A.

Pero el móvil no puede quedarse en el punto A'; por la acción de la gravedad, recorre la curva, en sentido contrario hasta llegar al punto inicial A. El movimiento se repite indefinidamente, *oscilando el móvil* de A a A' y de A' a A.

Cada ida de A a A' y cada vuelta de A' a A, se llama *oscilación simple*, y el conjunto de ambas, *oscilación completa*. La duración de una oscilación completa es el *período del movimiento pendular*.

Observaciones. — 1º Si el punto material estuviera lanzado desde el punto A, según la curva, con una velocidad inicial, llegaría hasta el punto A', y oscilaría indefinidamente entre A' y A₁, A₁ y A'₁.

2º En realidad el movimiento perpetuo del péndulo no puede realizarse a causa del rozamiento del móvil sobre la curva y de la resistencia del medio.

191. Velocidad del péndulo. — En un instante dado t , la posición M del péndulo está caracterizada ya por el arco $VM = s = l\theta$, ya por el ángulo $VOM = \theta$ o *elongación* en el instante t ; la elongación máxima $VOA = \theta_0$, señala la *amplitud* de las oscilaciones. — ¿Cuál es la velocidad en dicho punto M?

Apliquemos el teorema de la fuerza viva.

$$\text{De A a M :} \quad \frac{1}{2}mv^2 = Px = mgx;$$

$$\text{de donde} \quad v^2 = 2gx. \quad (1)$$

$$\text{Ahora bien} \quad x = \overline{OD} - \overline{OU} = l(\cos \theta - \cos \theta_0),$$

$$\text{o} \quad x = 2l \left(\sin^2 \frac{\theta_0}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right). \quad (2)$$

La fórmula (1) se convierte en :

$$v = 2 \sqrt{gl \left(\sin^2 \frac{\theta_0}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)}. \quad (3)$$

Discusión. — La velocidad v es la misma para las posiciones del móvil simétricas respecto de la vertical OV.

Es nula en los puntos A y A'; es máxima en V, al final de la curva :

$$v_1 = 2 \sqrt{gl \sin^2 \frac{\theta_0}{2}} = \sqrt{2gh}.$$

Duración de una oscilación. — En el caso de las *pequeñas oscilaciones* pendulares ($\theta_0 \leq 1^\circ$), se puede reemplazar en la fórmula (3) los senos por sus arcos.

$$\text{Se tiene entonces :} \quad v = \sqrt{gl(\theta_0^2 - \theta^2)}.$$

De donde se deduce la duración de una oscilación sencilla :

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Este tiempo es independiente de la amplitud : las oscilaciones son pues isócronas, o de igual duración.

192. Fuerza centrípeta. — Fuerza centrífuga. — Cuando un móvil describe una circunferencia, está sometido a una *fuerza centrípeta* F que lo atrae hacia el centro O y lo mantiene sobre la curva. La reacción de la circunferencia sobre el punto material es la *fuerza centrífuga* F' , igual y directamente opuesta a la primera (fig. 174).

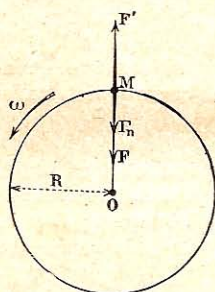


Fig. 174. — Fuerza centrípeta.
Fuerza centrífuga.

La fuerza centrífuga es la que tiende los ramales de la honda ; cuando cesa, el proyectil se escapa según la tangente a la trayectoria circular, y con la velocidad circunferencial que lo animaba.

Intensidad. — La fuerza centrípeta, y por consiguiente la fuerza centrífuga, se deduce de la aceleración centrípeta $M\Gamma_n$ del movimiento circular uniforme (28).

Sean m la masa del móvil, ω y v sus velocidades angular y lineal, R el radio de su trayectoria.

La aceleración centrípeta es :

$$\gamma_n = \omega^2 R = \frac{v^2}{R}$$

De donde la intensidad de la fuerza centrípeta resulta :

$$F = m\gamma_n = m\omega^2 R = m \frac{v^2}{R}$$

Aplicaciones. — La fuerza centrífuga interviene en el funcionamiento de las secadoras (fig. 32), de las bombas centrífugas (202), de los ventiladores de aire, de los reguladores de bolas (199), etc.

193. Movimiento de un punto material sobre un plano inclinado sin rozamiento. — Móvil colocado sobre el plano. — Sea M un punto material colocado sobre el plano inclinado, no está sometido sino a la acción de su peso $P = mg$ (fig. 175).

Está movido por la acción de la componente tangencial :

$$T = P \operatorname{sen} \alpha,$$

y desciende por el plano inclinado según una línea de máxima pendiente. La reacción R del plano es igual y directamente opuesta a la componente normal :

$$N = P \cos \alpha.$$

Tomemos por ejes de coordenadas : Ox según la línea de máxima pendiente en el sentido del descenso, y Oy perpendicular al plano; el origen O en el punto de partida del móvil.

Aplicamos el teorema de las fuerzas vivas al movimiento del punto según Ox .

El trabajo de N es nulo (176), el de T es positivo, y vale ($v_0 = 0$) :

$$\mathfrak{C} = Tx = mg \operatorname{sen} \alpha \cdot x = \frac{1}{2} mv^2;$$

de donde $v^2 = 2g \operatorname{sen} \alpha \cdot x.$

El movimiento es *rectilíneo y uniformemente acelerado* en el sentido del descenso.

Se tiene : $\gamma = g \operatorname{sen} \alpha,$ (1)

$v = gt \operatorname{sen} \alpha$ ($v_0 = 0$), (2)

y $x = \frac{1}{2} gt^2 \operatorname{sen} \alpha$ ($x_0 = 0$). (3)

Móvil lanzado hacia abajo. — La velocidad inicial v_0 está dirigida según la línea de máxima pendiente.

El movimiento es *rectilíneo y uniformemente acelerado* en el sentido del descenso.

Entonces $\gamma = g \operatorname{sen} \alpha,$ (1)

$v = v_0 + gt \operatorname{sen} \alpha,$ (2)

y $x = v_0 t + \frac{1}{2} gt^2 \operatorname{sen} \alpha.$ (3)

Móvil lanzado hacia arriba. — La velocidad inicial v_0 está dirigida según una línea de máxima pendiente.

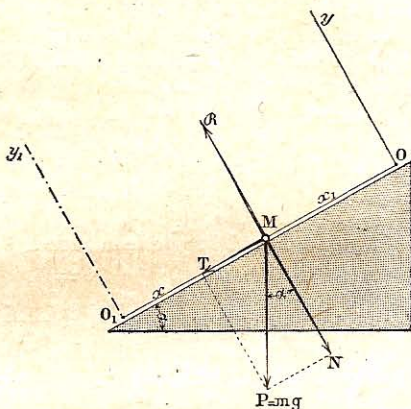


Fig. 175.

Movimiento sobre un plano inclinado (sin rozamiento).

Tomemos el eje O_1x_1 en el sentido de la subida, y O_1 en el punto de partida del móvil (fig. 175).

La fuerza T se opone a la ascensión.

El movimiento es primero *rectilíneo y uniformemente retardado* en el sentido de la subida.

$$\text{Entonces} \quad \gamma = -g \operatorname{sen} \alpha, \quad (1)$$

$$v = v_0 - gt \operatorname{sen} \alpha, \quad (2)$$

$$\text{y} \quad x_1 = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \operatorname{sen} \alpha. \quad (3)$$

El punto material se detiene cuando

$$v = 0,$$

$$\text{después de un tiempo} \quad t' = \frac{v_0}{g \operatorname{sen} \alpha},$$

$$\text{en un punto de abscisa} \quad x'_1 = \frac{v_0^2}{2g \operatorname{sen} \alpha}.$$

A partir de este momento, baja con movimiento *rectilíneo uniformemente acelerado*, sin velocidad inicial, análogo al del móvil colocado sobre el plano.

Observaciones. — 1º Si la velocidad inicial tuviese una dirección cualquiera sobre el plano inclinado, el movimiento sería *parabólico*, teniendo la parábola por eje una línea de máxima pendiente.

El estudio del movimiento sobre el plano inclinado presenta pues analogías grandes con el movimiento de un punto material en el vacío.

2º Sea h la altura vertical correspondiente al espacio x recorrido sobre el punto inclinado.

$$\text{Se tiene:} \quad v^2 = 2gx \operatorname{sen} \alpha = 2gh.$$

La velocidad sobre el plano inclinado depende únicamente de la altura de caída.

194. Problemas sobre el movimiento de un cuerpo. — 1º Un proyectil se tira según un ángulo de 30° , con una velocidad inicial de $95^m, 20$. — ¿ A qué altura llegará? — ¿ A qué distancia caerá?

$$\text{La altura del tiro} \quad h = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{2g} = \frac{95,2^2 \times \frac{1}{4}}{2 \times 9,81} = 115^m, 45.$$

$$\text{La amplitud} \quad a = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{g} = \frac{95,2^2 \times \sqrt{3}}{2 \times 9,81} = 800^m.$$

2º ¿ Cuál es la duración de las oscilaciones en un péndulo simple de $0^m, 2485$ de longitud?

$$t = \pi \sqrt{\frac{0^m, 2485}{9,81}} = 1,2 \text{ segundo.}$$

3º Las velocidades adquiridas por el mismo móvil que baja, sin velocidad inicial, por planos diversamente inclinados, son iguales cuando las alturas de los planos lo son.

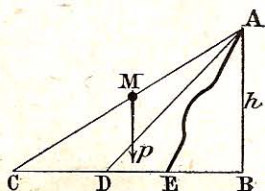
Sea h la altura común de los diversos planos inclinados AC, AD, ...

La velocidad adquirida por el móvil M, de peso p , es $v = \sqrt{2gh}$ en B, en C o en D.

En efecto el trabajo de la gravedad es :

$$\mathcal{E} = ph = mgh = \frac{1}{2} mv^2 \quad (v_0 = 0),$$

de donde $v^2 = 2gh$.



Observación. — La proposición sigue siendo cierta cualquiera que sea el camino recorrido AE.

4º ¿Cuál ha de ser la inclinación de un plano para que el móvil que lo baja tenga una velocidad horizontal máxima ?

La aceleración sobre el plano inclinado es : $g' = g \operatorname{sen} \alpha$, y la velocidad en el instante t es :

$$v = g't = gt \operatorname{sen} \alpha.$$

La componente horizontal v' de la velocidad v es :

$$v' = v \cos \alpha = gt \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} gt \operatorname{sen} 2\alpha.$$

Dicha velocidad v' es máxima para $\operatorname{sen} 2\alpha = 1$,
sea $2\alpha = 90^\circ$ o $\alpha = 45^\circ$.

5º Un automóvil que pesa 1692 kg hace un viraje de 50 m de radio, a la velocidad de 36 kilómetros por hora. — ¿Cuál es la fuerza centrífuga que tiende a volcarlo ?

La velocidad lineal es : $v = \frac{36000}{3600} = 10 \text{ m}$ por segundo.

La fuerza centrífuga $F = \frac{mv^2}{r} = \frac{1962 \text{ kg}}{9,81} \times \frac{10^2}{50} = 400 \text{ kg}$.

Se admite que dicha fuerza horizontal se aplica en el centro de gravedad. Compuesta con el peso del coche da una resultante cuya dirección debe, para la estabilidad, pasar por el interior del paralelogramo de apoyo de las ruedas sobre el suelo. Conviene moderar la marcha en los virajes.

CAPÍTULO II

DINÁMICA DE LOS MOTORES INDUSTRIALES

SUMARIO

§ 1. *Ecuación del trabajo de una máquina* : Trabajo motor y trabajo resistente. — Ecuación del trabajo. — Medida del trabajo útil: rendimiento. — Reguladores y volantes.

§ 2. *Bombas. Motores hidráulicos* : Bombas de émbolos. Bombas centrífugas. Bombas rotativas. — Ruedas hidráulicas : de Poncelet, de Sagebien, de cabeza de agua. — Turbinas de Fourneyron, de Fontaine, de Francis. — Ruedas turbinas de Pelton. — Instalaciones hidráulicas.

§ 3. — *Máquina de vapor* : Calderas de vapor. — Máquinas de émbolo : descripción, distribución, trabajo, diagramas. — Turbinas de vapor : de Laval, de Parsons.

§ 4. *Motores de gas y de petróleo* : Ciclo de cuatro tiempos. Descripción. — Motores de gas del alumbrado, de gas pobre. — Motores de petróleo, de esencia. — Motor Diesel. — Trabajo y diagramas.

§ 1. — ECUACIÓN DEL TRABAJO DE UNA MÁQUINA

195. Trabajo motor y trabajo resistente. — 1º Relativamente a la energía mecánica, las máquinas están destinadas a transmitir el trabajo de las fuerzas (145).

Las fuerzas que obran sobre una máquina son de dos clases :

Las que producen un movimiento, se llaman *potencias* y engendran un *trabajo motor* \mathfrak{E}_m ;

Las que tienden por lo contrario a retardar o a detener su movimiento, se llaman por esto *resistencias* y engendran un *trabajo resistente* \mathfrak{E}_r .

Las resistencias a su vez se dividen en :

Resistencias útiles, que son el efecto mecánico que ha de producirse, el fin con que se instala la máquina. Su trabajo es pues un *trabajo útil* \mathfrak{E}_u ;

Resistencias pasivas, tales como rozamientos, calentamientos, vibraciones comunicadas por los choques, etc., que se originan en el movimiento

mismo de los órganos de la máquina; absorben en pura pérdida parte del trabajo en forma de *trabajo pasivo* o de *frotamiento* \mathfrak{E}_f .

Así pues:
$$\mathfrak{E}_r = \mathfrak{E}_u + \mathfrak{E}_f. \quad (1)$$

Quando se eleva un cubo de agua por medio de un torno, la fuerza que obra sobre el manubrio produce el trabajo motor; el peso del agua elevada multiplicado por la altura de elevación, es el trabajo útil; el peso del cubo, la tensión de la cuerda, los rozamientos de los gorriones, etc., originan el trabajo pasivo.

196. Ecuación del trabajo de una máquina. — Apliquemos el teorema general de las fuerzas vivas al movimiento de una máquina (185).

Sean v_0 y v las velocidades inicial y final durante el intervalo de tiempo considerado.

Las fuerzas motrices y las fuerzas resistentes obran en sentido contrario y el teorema se traduce analíticamente por,

$$\mathfrak{E}_m - \mathfrak{E}_r = \mathfrak{E}_m - \mathfrak{E}_u - \mathfrak{E}_f = \frac{1}{2} \Sigma m v^2 - \frac{1}{2} \Sigma m v_0^2. \quad (2)$$

Esta importante relación lleva el nombre de *ecuación del trabajo*.

Discusión. — 1º *Periodo de arranque.* — La máquina partiendo del reposo, $v_0 = 0$; luego se acelera la velocidad hasta alcanzar la velocidad de régimen v .

Entonces

$$v > v_0;$$

y
$$\frac{1}{2} \Sigma m v^2 = \mathfrak{E}_m - \mathfrak{E}_u - \mathfrak{E}_f \text{ es positivo,}$$

es decir que

$$\mathfrak{E}_m > \mathfrak{E}_u + \mathfrak{E}_f. \quad (3)$$

El trabajo motor supera al trabajo resistente.

2º *Periodo normal.* — La máquina posee una velocidad constante, llamada *velocidad de régimen*.

Entonces

$$v = v_0 = C^{te},$$

y
$$\mathfrak{E}_m = \mathfrak{E}_u + \mathfrak{E}_f. \quad (4)$$

La máquina tiene un movimiento uniforme, y el trabajo motor es igual al trabajo resistente.

3º *Periodo de parada.* — La velocidad decrece poco a poco hasta pararse la máquina.

Entonces

$$v = 0,$$

y
$$\mathfrak{E}_m < \mathfrak{E}_u + \mathfrak{E}_f. \quad (5)$$

El trabajo motor es menor que el trabajo resistente.

197. Medición del trabajo útil. Freno de Prony. — Descripción.

— Para determinar el trabajo útil de una máquina, se emplea el *freno de Prony** (fig. 176).

Una polea P está acñada sobre el árbol A de la máquina que se ensaya. Un *freno* F, compuesto de cuñas de madera dura y de una zapata D, roza contra la llanta de la polea, apretándose a voluntad las cuñas por medio de las tuercas E. Una *palanca* BC soporta el collar y la zapata, así como un platillo G; unos topes H y K impiden que sea arrastrada la palanca por la rotación del árbol. Se equilibra la palanca por medio de un contrapeso.

Medida del trabajo. — Se aprietan las tuercas E hasta que la máquina haya alcanzado la *velocidad de régimen* (196), al mismo tiempo se carga de pesas el platillo G. La palanca ha de mantenerse horizontal durante el ensayo.

El rozamiento del freno F absorbe todo el trabajo útil de la máquina.

Sean F la fuerza de rozamiento, r el radio de la polea, l la longitud de

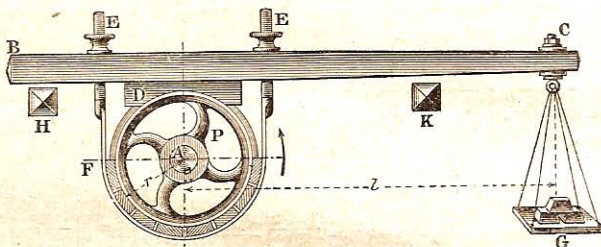


Fig. 176. — Freno de Prony.

la palanca, P las pesas colocadas en el platillo, n el número de vueltas por minuto (estando equilibrada la palanca BC).

El trabajo de rozamiento es :

$$\mathfrak{G}_u = \mathfrak{G}F = F \cdot 2\pi r \cdot \frac{n}{60} = F \cdot \frac{\pi r n}{30} \quad (1)$$

Alcanzada la velocidad de régimen, las fuerzas P y F se equilibran en el extremo de sus brazos de palanca l y r :

$$Fr = Pl \quad (2)$$

La ecuación (1) se convierte en :

$$\mathfrak{G}_u = P \frac{l}{r} \cdot \frac{\pi r n}{30} = \frac{\pi Pl n}{30},$$

en kilogrametros por segundo,

$$\text{o} \quad \mathfrak{G}_u = \frac{\pi Pl n}{30 \times 75} = 0,001396 Pl n, \quad (3)$$

en caballos-vapor.

Problema. — $P = 150 \text{ kg}$; $l = 3 \text{ m}$; $n = 100$ vueltas.

$$\text{El trabajo útil: } \mathfrak{G}_u = \frac{\pi \times 150 \times 3 \times 100}{30 \times 75} = 62,83 \text{ HP.}$$

198. Rendimiento mecánico de una máquina. — Se llama *rendimiento mecánico* de una máquina, la relación $\frac{\mathfrak{G}_u}{\mathfrak{G}_m} = k$ del trabajo útil al trabajo motor.

Este rendimiento es siempre menor que la unidad, pues, durante el periodo normal :

$$k = \frac{\mathfrak{G}_u}{\mathfrak{G}_m} = \frac{\mathfrak{G}_m - \mathfrak{G}_f}{\mathfrak{G}_m} = 1 - \frac{\mathfrak{G}_f}{\mathfrak{G}_m}$$

En las *máquinas de vapor* el rendimiento varía generalmente entre 0,60

y 0,80; puede alcanzar 0,85 a 0,90 en las máquinas perfeccionadas y de gran potencia.

En los *motores de gas*, el rendimiento varía entre 0,70 y 0,85.

En las *dinamos* de corriente continua, el rendimiento, teniendo en cuenta las pérdidas por rozamientos mecánicos, resistencia eléctrica interior, alcanza frecuentemente 0,90; para las máquinas de corriente alterna varía entre 0,75 y 0,85.

199. Reguladores y volantes. — La máquina ideal sería aquella en que permaneciese constante la velocidad de régimen.

Prácticamente las variaciones accidentales del trabajo motor y del trabajo resistente, la presencia de la biela y de otros órganos de movimiento alternativo, impiden que se realice esta uniformidad.

Los *reguladores* y los *volantes* corrigen en parte las variaciones de velocidad.

1º Los *reguladores* son aparatos que combaten las *variaciones accidentales* de velocidad producidas por una causa extraña (embrague de una máquina herramienta, cambio de presión en el vapor...).

Están todos basados sobre el *principio* siguiente: Cuando la velocidad de régimen de la máquina aumenta, el regulador disminuye el trabajo motor, e inversamente, cuando la velocidad disminuye, el regulador aumenta el trabajo motor.

El tipo clásico es el *regulador de Watt* * (fig. 80). Cuando la velocidad de la máquina aumenta, la fuerza centrífuga separa las bolas W, lo que determina por intermedio de palancas, el cierre más o menos completo de la válvula *v* de llegada del vapor. El regulador obra en sentido inverso cuando disminuye la velocidad.

2º Los *volantes* limitan las *variaciones periódicas* producidas por los órganos de movimiento alternativo.

Son ruedas de gran diámetro y de masa considerable, repartida sobre todo en la circunferencia exterior o *llanta*, unida por medio de brazos con el cubo central.

El volante obra mediante la fuerza viva almacenada en su llanta: durante el arranque disminuye la aceleración hasta que la máquina alcance su velocidad de régimen; durante la marcha normal mantiene dicha velocidad de régimen entre un máximo y un mínimo muy próximos.

§ 2. — BOMBAS. — MOTORES HIDRÁULICOS

200. Clasificación de las máquinas hidráulicas. — 1º Las bombas sirven para elevar los líquidos.

Con las norias, el tornillo de Arquímedes *, etc., forman la clase de las *máquinas elevadoras*, que han de recibir de un motor la potencia mecánica necesaria para vencer la gravedad que se opone a la ascensión del líquido.

Los *arietes hidráulicos* obran por la fuerza viva del agua cuyo curso se detiene bruscamente.

2º En los *motores hidráulicos* es el agua misma que, en su caída gasta su energía cinética; la potencia de los saltos de agua se aprovecha mediante las *ruedas* y las *turbinas hidráulicas*.

I. — Bombas.

201. Bombas de émbolo. — Se distinguen : las *bombas de émbolo*, las *bombas centrifugas* y las *bombas rotativas*.

Tipos de bombas de émbolo. — En estas bombas, el émbolo está animado de un movimiento rectilíneo alternativo.

Existen tres tipos : la bomba *impelente*, la bomba *aspirante*, la bomba *aspirante e impelente*. Su funcionamiento se explica en los tratados de Física.

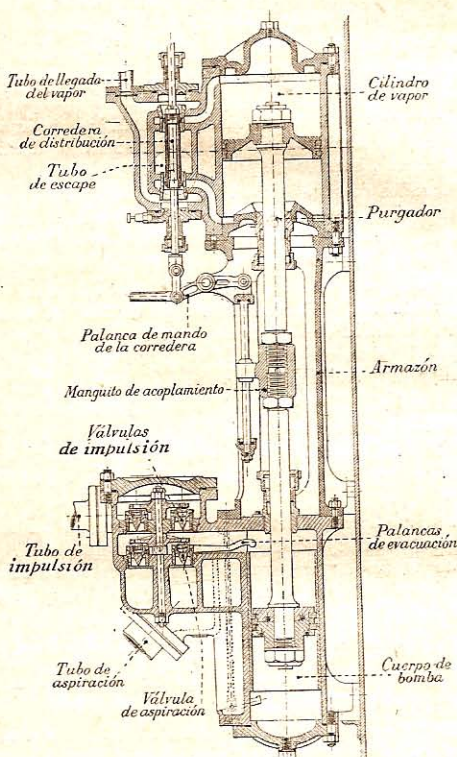


Fig. 177. — Caballete vertical, sistema Belleville.

Las bombas son de *simple efecto* cuando, a cada carrera del émbolo corresponde solo la aspiración o la impulsión del agua.

Son de *doble efecto* cuando, a cada carrera, ambas operaciones se producen simultáneamente sobre una u otra cara del émbolo.

Las bombas de movimiento alternativo ofrecen el inconveniente de la irregularidad en la producción y de los golpes de ariete en las cañerías, a menos que estén éstas provistas de *cámaras de aire*.

Los *caballetes* son bombas que sirven para la alimentación de las calderas, en que el émbolo de vapor acciona directamente el émbolo de agua. Dos sistemas muy conocidos de estas bombas son el caballete de *Belleville* (fig. 177) y el de *Worthington* (fig. 178).

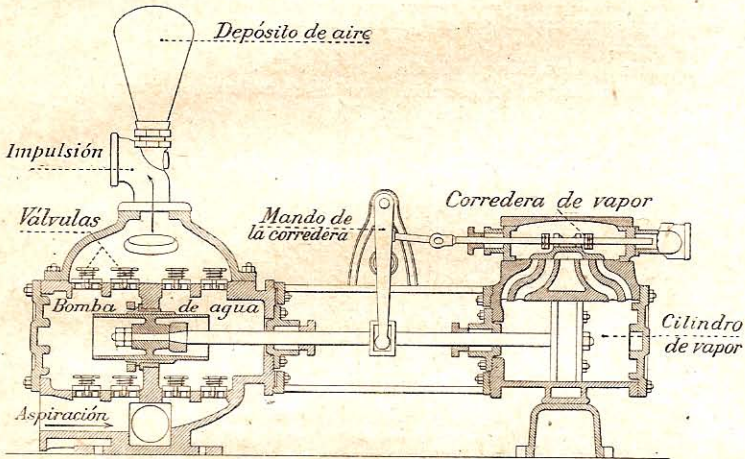


Fig. 178. — Caballete horizontal, sistema Worthington.

Caudal. Trabajo. — 1º Para las bombas de simple efecto, el *caudal en metros cúbicos por segundo* es teóricamente :

$$Q = \frac{S \cdot C \cdot n}{60}$$

$S = 1/4 \pi d^2$ es la sección del émbolo en metros cuadrados,

C , la carrera del émbolo en metros,

n , el número de vueltas (dobles carreras) por minuto.

El rendimiento en volumen varía de 0,98 a 0,85.

2º El *trabajo* teórico necesario para elevar Q metros cúbicos de agua por segundo a una altura total H es :

$$T = 1000 \frac{Q \cdot H}{75} \text{ caballos.}$$

El rendimiento mecánico varía entre 0,90 y 0,70, de modo que el rendimiento total está comprendido entre 0,85 y 0,60.

Para las bombas de doble efecto, hay que duplicar el caudal y el trabajo.

Problema. — ¿Cuál es el caudal por hora de una bomba de simple efecto, de 10^{cm} de diámetro y 15^{cm} de carrera, que da 30 vueltas por minuto? — Rendimiento volumétrico : 0,90.

Se tiene :

$$\text{Sección } S = 0\text{m}^2,007854.$$

$$\text{Volumen } V = 0,90 \times 0,007854 \times 0,15 \times 30 \times 60 = 1\text{m}^3,908.$$

202. Bombas centrífugas. — Principio. — En estas bombas el agua es arrastrada por una rueda de álabes, animada de una rotación rápida alrededor de un árbol horizontal. El líquido, aspirado en el centro de la rueda, es rechazado por la periferia, de donde el nombre de *bombas centrífugas*.

La altura de elevación puede alcanzar 50 a 60^m.

La gran velocidad de rotación permite el embrague directo de estas bombas con motores eléctricos (fig. 179).

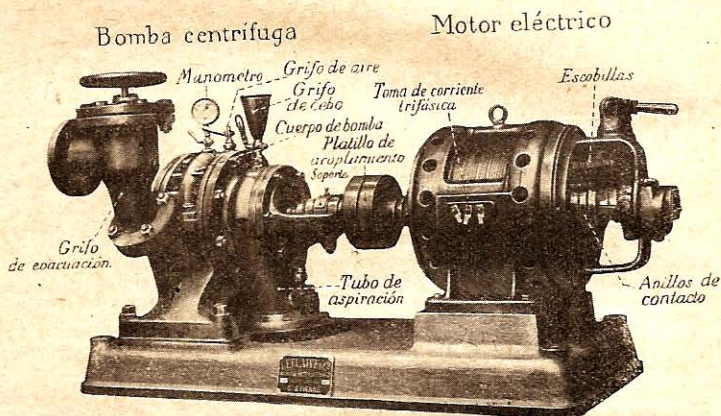


Fig. 179. — Bomba centrífuga, movida por un motor eléctrico.

Empleo. — Las bombas centrífugas dan gran caudal de agua, funcionan lo mismo con agua turbia que con agua clara. Estas cualidades explican su utilización en las obras públicas a pesar de su rendimiento mecánico muy escaso.

Un tipo muy empleado es la bomba *Dumont* (fig. 180).

Velocidad. Trabajo. — Sean Q metros cúbicos a elevar por segundo a una altura total H .

1º La *velocidad* circunferencial de la rueda es función de la altura de ascensión, varía de :

$$V = \sqrt{2gH} \text{ (grandes alturas) a } V = 1,5 \sqrt{2gH} \text{ (alturas pequeñas).}$$

2º El *diámetro* de la rueda se deduce de la velocidad :

$$\text{De } V = \frac{\pi D n}{60}, \text{ resulta } D = \frac{60 V}{\pi n};$$

siendo n el número de vueltas por minuto.

3º El trabajo teórico es :

$$T = 1000 \frac{QH}{75} \text{ caballos.}$$

El rendimiento mecánico varía entre 0,65 y 0,40.

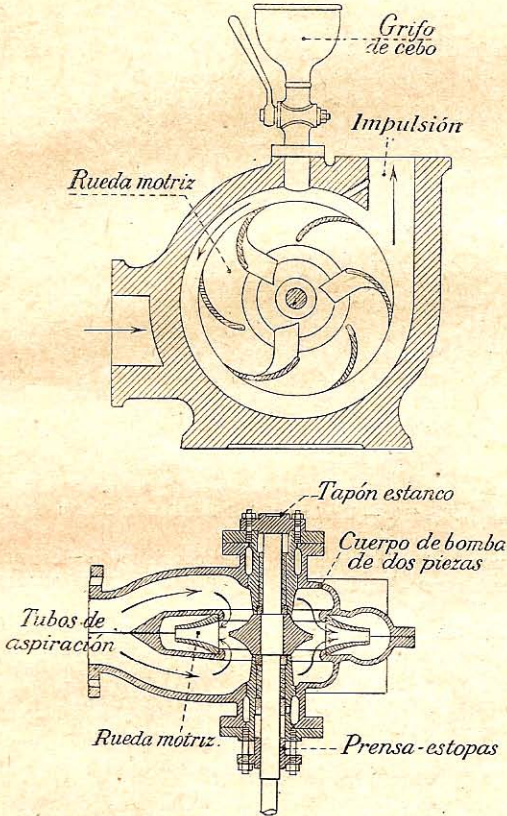


Fig. 180. — Bomba centrífuga, sistema Dumont.

Bombas turbinas. — Para impeler el agua a muy gran altura (hasta 500 metros) se emplean bombas turbinas, análogas a las turbinas de vapor de ruedas múltiples.

Tal es la bomba multicelular *Rateau*, cuyo rendimiento alcanza 0,70 (fig. 181).

203. Bombas rotativas. — El émbolo de dichas bombas está animado de un movimiento rotativo continuo.

Lo que las distingue de las bombas centrífugas es que el agua circula entre el émbolo y el cuerpo de bomba y no en la rueda de álabes.

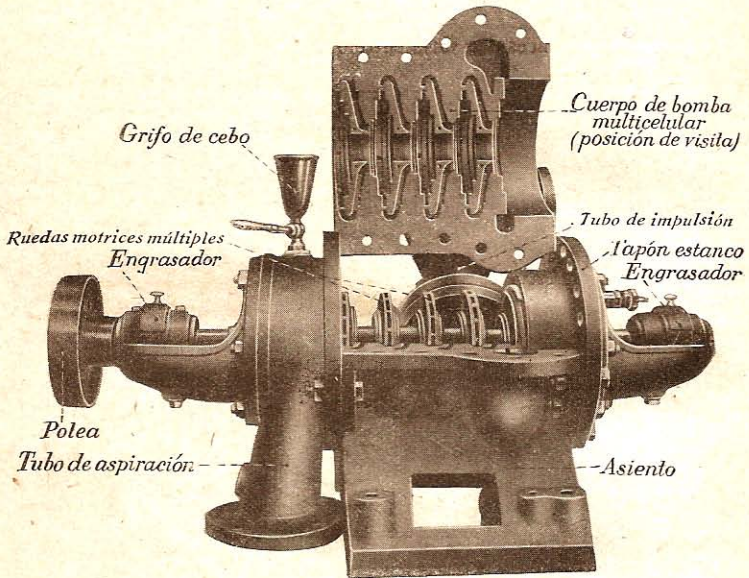


Fig. 181. — Bomba multicelular, sistema Rateau.

Tienen una potencia escasa, pues conviene darles una rôtación bastante lenta para disminuir los escapes de agua y aumentar el rendimiento.

Las bombas rotativas se emplean como bombas de agua, bombas de vino, aspiradores de gases, y en los contadores de agua o de gas.

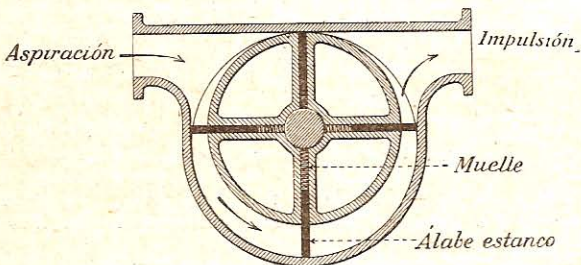


Fig. 182. — Bomba rotativa de un eje.

Bombas de un eje (fig. 182). — En un cuerpo cilíndrico fijo gira el

émbolo cuyo eje es ligeramente descentrado. Dicho émbolo está provisto de paletas guiadas por ranuras y constantemente apoyadas por muelles contra el cuerpo de bomba.

Durante la rotación, el volumen entre dos paletas crece del lado de la

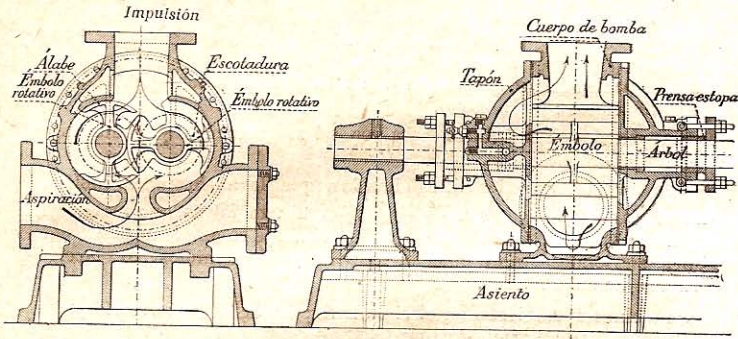


Fig. 183. — Bomba rotativa de dos ejes, sistema Greindl.

aspiración y decrece del lado opuesto, produciéndose así la circulación del agua.

Las bombas de un eje tienen escapes importantes, que reducen su rendimiento a 0,50. Se les prefieren las de dos ejes.

Bombas de dos ejes.
— En la bomba (fig. 184), los émbolos son dos ruedas dentadas que se arrastran mutuamente. Una disposición especial asegura el contacto de cada diente de los émbolos con el cuerpo de bomba. Dichas bombas no son sin embargo tan perfectas como la de Greindl, que es el tipo clásico de estos aparatos (fig. 183).

En una doble caja cilíndrica se mueven dos émbolos, formados por dos paletas y dos escotaduras. Unos engranajes exteriores mueven los dos émbolos en sentido contrario. Durante la rotación, las paletas encajan alternativamente en los escotaduras de perfil cicloidal.

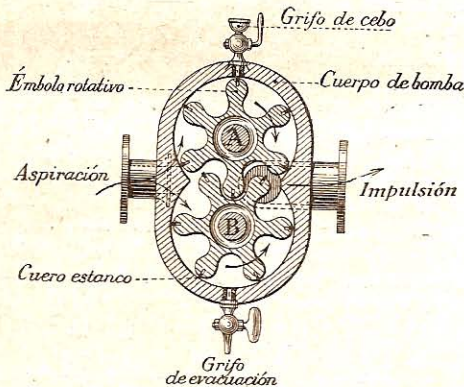


Fig. 184. — Bomba rotativa de dos ejes.

La bomba está estudiada para que el agua recorra el aparato con una velocidad sensiblemente constante. El rendimiento medio es así de 0,80 y puede llegar a 0,90.

La bomba Greindl aspira el aire y los gases lo mismo que el agua; se ceba sola y puede impeler los fluidos a cualquier altura.

II. — Ruedas hidráulicas.

204. Clasificación de los motores hidráulicos. — Estos motores forman dos clases :

1º Las **ruedas hidráulicas** para los saltos pequeños y medianos, de 0^m,30 a 20 metros.

2º Las **turbinas** para los saltos elevados, que llegan hasta 900 metros.

Las ruedas hidráulicas son de eje horizontal, mientras que las turbinas pueden ser también de eje vertical. Las primeras se emplean desde miles de años, sirviéndose ya de ellas los Egipcios y los Fenicios para accionar las ruedas de sus molinos.

Las turbinas aparecieron en el siglo XVIII; Euler * dió su teoría y Fourneyron las aplicó a la industria en 1832.

205. Potencia de un salto de agua. — Potencia teórica. — La *potencia teórica* de un salto de agua, de altura total H , es igual a la suma de la potencia viva de entrada del agua y del trabajo de la gravedad.

Sean P el peso del agua que entra en el motor por segundo (o su volumen en litros), V_0 la velocidad absoluta de entrada a la que corresponde una altura h' y h la altura de caída del agua contenida en el motor.

$$\text{Se tiene : } \quad \mathfrak{C}_m = Ph + \frac{PV_0^2}{2g} = P(h + h') = P \cdot H,$$

$$\text{o en caballos} \quad \mathfrak{C}_m = \frac{PH}{75}.$$

Trabajo útil. — El trabajo útil en el motor depende del rendimiento que es tanto mayor :

1º *Cuanto más débil es el choque a la entrada*, lo que se obtiene ya disminuyendo la velocidad V_0 , haciendo obrar el agua más por su peso que por su potencia viva, ya disponiendo el primer elemento del álabe en dirección de la velocidad relativa de entrada.

2º *Cuanto menor es la velocidad de salida del agua*, velocidad que no puede ser nula, puesto que el agua ha de salir de la turbina, pero que se reduce a lo mínimo.

$$\text{Problema. — } \quad P = 1000 \text{ kg, } \quad H = 7 \text{ m, } 50.$$

$$\text{La potencia teórica es : } \quad \mathfrak{C}_m = \frac{1000 \times 7,50}{75} = 100 \text{ caballos indicados.}$$

$$\text{El trabajo útil obtenido en el motor, con un rendimiento } k = 0,70 \text{ es :}$$

$$\mathfrak{C}_u = k \mathfrak{C}_m = 100 \times 0,7 = 70 \text{ caballos efectivos.}$$

206. Ruedas hidráulicas. — Según el modo de entrada del agua se dividen las ruedas en tres categorías :

1º Las *ruedas de corrientes inferiores*, o *ruedas por debajo*, en que el agua obra principalmente por su fuerza viva;

2º Las *ruedas de costado*, en que la gravedad agrega su acción a la de la potencia viva;

3º Las *ruedas de corrientes superiores*, o de *cangilones*, o *ruedas por encima* en que el peso del agua es el principal motor.

207. Ruedas por debajo. Rueda de Poncelet. — Las *ruedas de corrientes inferiores*, así llamadas porque reciben el agua por su parte inferior fueron las primeras construídas.

Se dividen en tres clases: 1º las *ruedas de álabes planos*; 2º las de *álabes curvos*; 3º las *ruedas colgadas para barcos*.

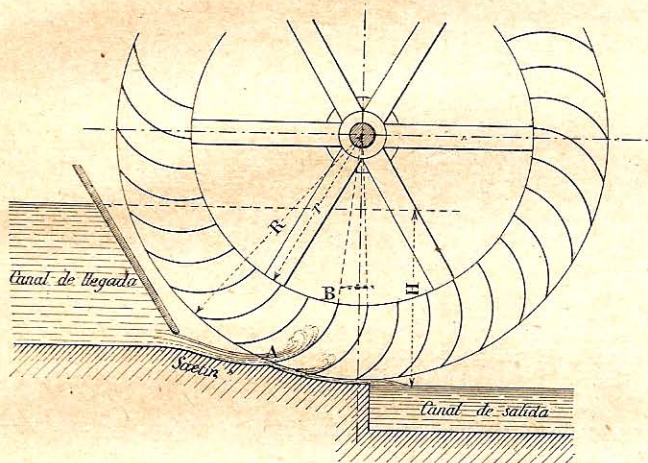


Fig. 185. — Rueda de Poncelet, de álabes curvos.

El agua obra por su fuerza viva: la altura del salto es débil, 2 metros a lo más.

En las ruedas de álabes planos, el rendimiento medio $k=0,35$, a causa del choque del agua contra los álabes.

La rueda de álabes curvos, cuyo tipo es la *rueda de Poncelet* * (fig. 185), es la única que dé buen rendimiento: $k=0,60$.

208. Ruedas de costado. Rueda de Sagebien. — En estas ruedas el agua entra lateralmente en los álabes, algo por debajo del eje.

Se las divide en tres clases: 1º las *ruedas de cabeza de agua*; 2º las *ruedas sin cabeza de agua*; 3º la *rueda de Sagebien*.

Su rendimiento es bastante elevado: para las primeras, $k=0,70$; para las segundas $k=0,50$ a $0,60$; la rueda de Sagebien tiene mayor rendimiento que todas las demás ruedas hidráulicas, pues alcanza 90 %.

El agua entra en la rueda de Sagebien * (fig. 186) con una velocidad muy débil, de modo que solo obra por su peso. Los álabes son planos y a entrar en el agua forman un ángulo de 40° a 45° con la horizontal. Esta

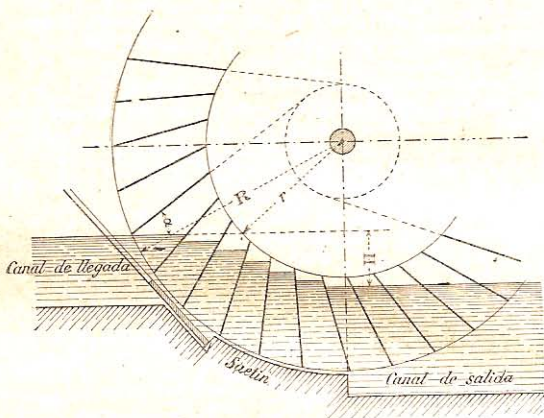


Fig. 186. — Rueda de Sagebien.

rueda conviene para los saltos pequeños (de $0^m,40$ a 2 metros). Su precio es bastante elevado, pues su corta velocidad exige transmisiones complicadas.

209. Ruedas por encima. Ruedas de cabeza de agua. — Las ruedas de esta clase reciben el agua por la parte superior.

Se dividen en tres clases :

- 1º Las *ruedas de cabeza de agua*, en que el agua llega por un saetín;
- 2º Las *ruedas sin cabeza de agua*, en que el agua cae sin pasar por una compuerta;
- 3º Las *ruedas de pecho*, en que el agua entra en los cangilones por encima del eje de la rueda; el nivel de llegada es más elevado, y una *compuerta de persianas* distribuye el agua.

Las ruedas de esta clase se usan para los saltos medianos de 3 a 6 metros, pero pueden utilizar hasta los de 10 a 15 metros.

En las ruedas de pecho $k=0,60$ a $0,70$; los rendimientos más elevados son los obtenidos por las ruedas sin cabeza de agua, en que $k=0,75$ a $0,80$.

El de las ruedas con cabeza de agua es menor : $k=0,65$ a $0,75$, pues no se puede disponer el primer elemento del cangilón exactamente en la dirección de la velocidad relativa; para conseguirlo habría que abrir

demasiado dichos cangilones y caería el agua muy pronto (fig. 187). E

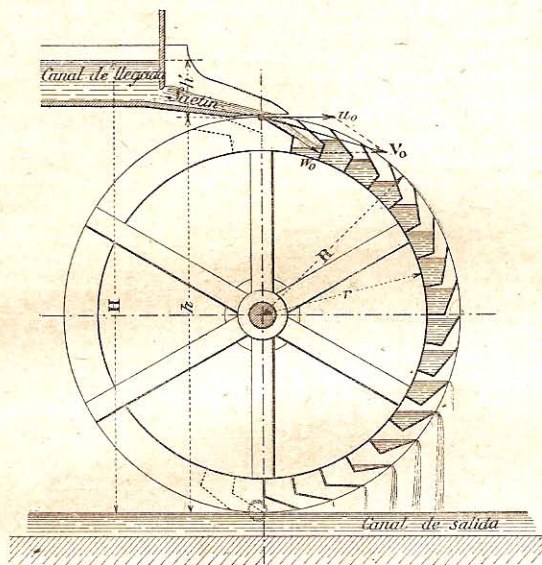


Fig. 187. — Rueda con cabeza de agua, con saetín de llegada.

ésta otra causa de la disminución en el rendimiento, inconveniente compensado por la economía de instalación.

III. — Turbinas hidráulicas.

210. Turbinas. — Clasificación. — Según el modo de acción o de circulación del agua se distinguen :

1º Las *turbinas de acción*, en que el trabajo es producido únicamente por la fuerza viva del agua, y las *turbinas de reacción*, donde se produce al mismo tiempo por la velocidad y la presión del agua ;

2º Las *turbinas radiales* de coronas concéntricas yuxtapuestas y de circulación horizontal de agua ; las *turbinas axiales* de coronas iguales sobrepuestas y de circulación de agua vertical ; las *turbinas mixtas* o *americanas* en que el agua circula oblicuamente en cangilones de cuchara.

Las turbinas radiales y mixtas pueden ser *centrifugas* o *centrípetas*, según el agua del receptor se aleje o se aproxime del eje del aparato.

Ventajas. — Movidas por saltos de agua a veces considerables, las turbinas tienen una velocidad de rotación mayor y dimensiones más reducidas que las ruedas. Pueden producir grandes potencias ; en la fábrica del Niágara las turbinas son de 10 000 caballos cada una.

Las turbinas se adaptan por lo demás a todos los saltos, a todos los caudales y a todas las velocidades, sin disminución sensible del rendimiento.

Necesitan, es cierto, una construcción esmerada, ofrecen dificultades de visita y pueden obstruirse por los cuerpos extraños arrastrados por el agua, pero sus cualidades superan con mucho estos inconvenientes.

Las grandes instalaciones hidroeléctricas no son posibles sino con turbinas.

211. Turbinas radiales. Turbina de Fourneyron *. — Descripción. — 1º *Distribuidor*. — El agua traída por un canal o caz a la cámara

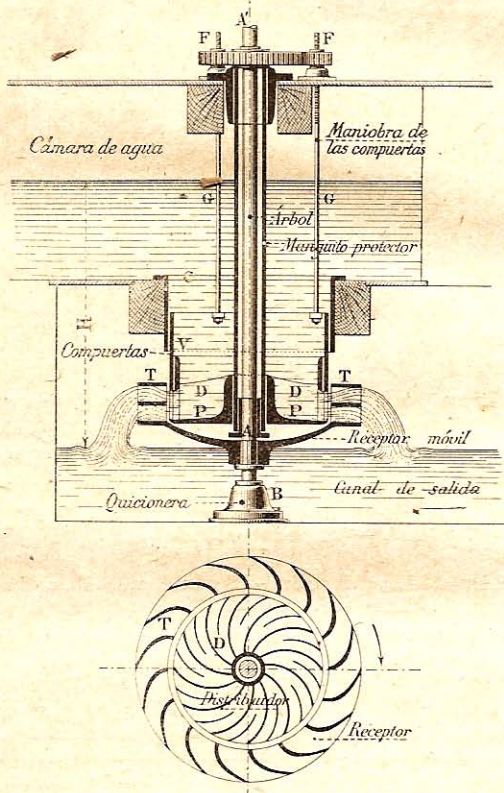


Fig. 188. — Conjunto de la turbina de Fourneyron.

de la turbina sale por una cuba G en cuyo fondo P se encuentran dispuestos álabes directores D fundidos con él (fig. 188).

2º *Receptor y árbol*. — El fluido se dirige según los álabes del receptor móvil T fijo en el árbol A que gira en una quionera B.

3º *Compuertas*. — Las compuertas se accionan a mano. Un manguito cilindrico V se desliza con rozamiento suave en el interior de la cuba C, mediante vástagos verticales G arrastrados por tres piñones F.

1ª figura representa la compuerta cerrada hasta la tercera parte. Se para la turbina bajando el manguito V hasta el fondo P.

Rendimiento. — El rendimiento alcanza 0,70 a 0,75.

212. Turbinas axiales. Turbina de Fontaine*. — Descripción.

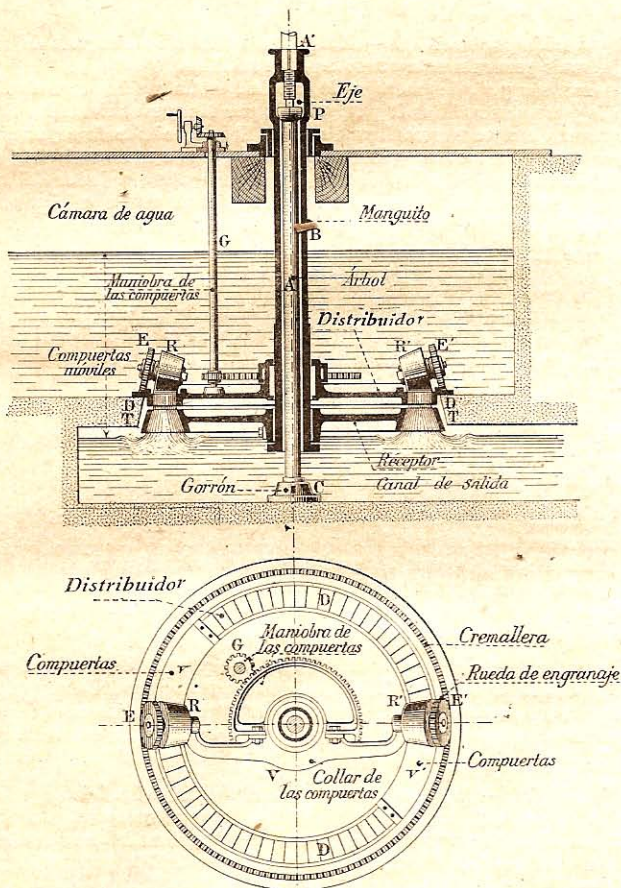


Fig. 189. — Conjunto de la turbina de Fontaine.

— *Distribuidor*. — El distribuidor D es una corona fija de hierro colado que constituye el fondo de la cámara de agua (fig. 189).

2º *Receptor y quicio*. — El receptor móvil T está acuñado sobre el manguito móvil B que rodea el árbol fijo A. El árbol A' de la fábrica, ensamblado con el quicio P que termina el manguito B, descansa, por la parte superior del árbol A, sobre un disco de acero abundantemente lubricado.

Este quicio exterior P presenta, sobre el de la turbina de Fourneyron, la ventaja de ser de acceso fácil, de poderse engrasar seguramente y de permitir la regulación exacta del juego entre el distribuidor y el receptor por medio del tornillo que termina el árbol A'.

3º *Regulación por rodillos*. — Entre los numerosos sistemas de regulación, el más generalmente usado es el de rodillos.

Dos coronas *v* y *v'*, de cuero o de caucho, están unidas con el distribuidor D y con dos rodillos R y R' guiados por las ruedas dentadas E y E' que engranan con una cremallera circular. El movimiento de regulación a mano, se comunica, por un vástago G y un piñón, a una semirueda dentada E, unida con el collar V que gira libremente alrededor del manguito B. Según el sentido del movimiento, las coronas *v* y *v'* cubren en los álabes del distribuidor o se arrollan los rodillos R y R'.

La figura 189 representan dichas compuertas cerradas en su cuarta parte.

Rendimiento. — Para tener la pérdida mínima a la salida del agua, el plano inferior del receptor ha de estar lo más cerca posible del canal de desagüe. El rendimiento normal varía entre 70 y 80 %.

213. Turbinas mixtas o americanas. — Son de reacción y centrípetas. El tipo principal es la turbina de Francis.

Describiremos la turbina Hércules, caracterizada por su distribuidor en forma de persiana (fig. 190).

Descripción. — 1º *Distribuidor*. — El distribuidor es bastante alto, lo cual asegura, con un diámetro débil, un caudal considerable. Unos tabiques horizontales dividen la vena de agua e impiden su contracción.

El distribuidor soporta una cuba que protege el mecanismo de regulación. Descansa sobre la bóveda del canal de desagüe, a la que está fijado por medio de pernos o de tornillos.

2º *Receptor*. — Dos series de álabes receptores de cuchara están ensambladas sobre un porta-álabes de hierro colado; los álabes superiores dirigen el agua hacia los inferiores. De este modo la introducción del agua en el distribuidor es radial, y axial su evacuación en el receptor (fig. 191).

3º *Regulación*. — La compuerta es un manguito cilíndrico, perfectamente torneado, que corre entre el distribuidor y el receptor, al modo de la compuerta de Fourneyron. Dos cremalleras, accionadas por ruedas de ángulo, mueven la compuerta, cuya maniobra se facilita por medio de un contrapeso.

Rendimiento. — Según ensayos hechos en América, en Holyoke (Massachusetts), el rendimiento de las turbinas mixtas alcanza hasta 90 %. Los constructores garantizan 80 a 85 %.

214. Ruedas turbinas. — Las *ruedas turbinas*, derivadas de la rueda de Pelton, convienen para los saltos muy altos.

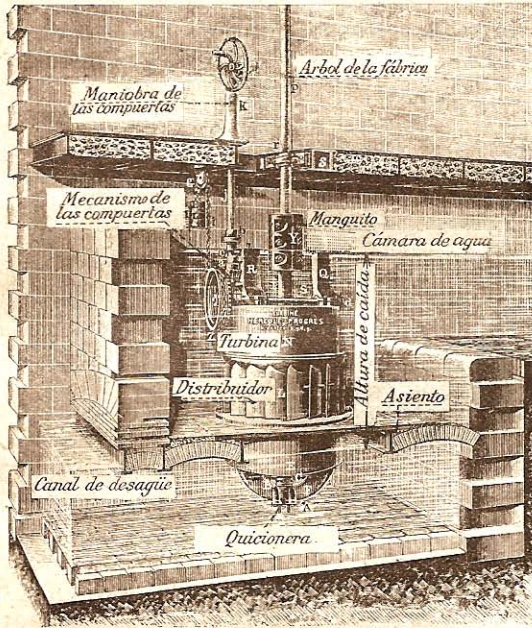


Fig. 190. — Instalación de una turbina mixta.

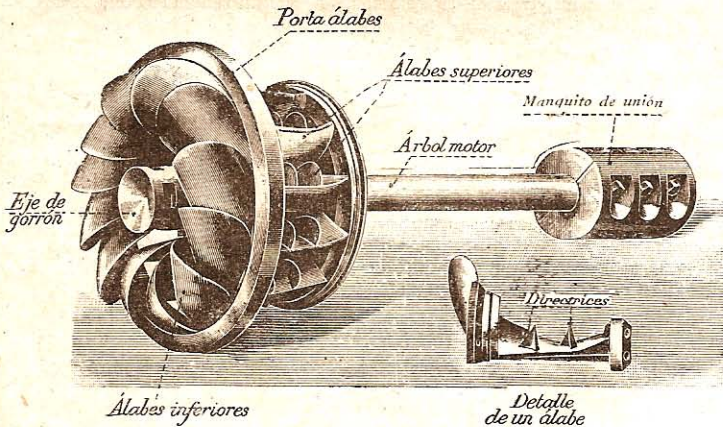


Fig. 191. — Turbina del tipo Hércules. — Receptor.

Sobre una corona vertical están fijados sólidamente los cangilones, en forma de una doble cuchara que divide una pared delgada (fig. 192).

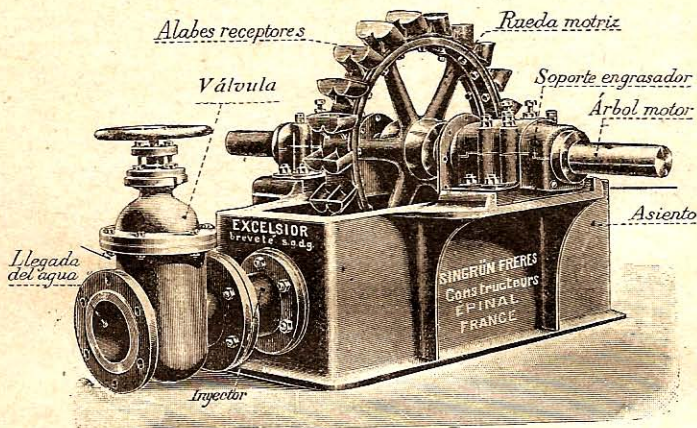


Fig. 192. — Rueda turbina para saltos elevados.

El chorro de agua se dirige contra los cangilones por dos toberas, una fija, otra regulable, para obtener una vena líquida compacta, a pesar de las variaciones de caudal.

Para alturas muy grandes, y velocidades circunferenciales considerables, la rueda de cangilones es un disco macizo de acero o de bronce.

El rendimiento de las ruedas turbinas es de 85 a 90 %.

215. Instalaciones hidráulicas. — Canal de toma de agua. — Se emplean dos dispositivos, según sean los saltos elevados o medianos :

1º En los países montañosos, el agua de los torrentes se hace llegar a una cámara de agua de donde parte una tubería forzada que baja rápidamente por la vertiente hasta las turbinas.

2º El agua de los ríos se desvia por medio de un canal de llegada provisto de presas y compuertas (fig. 193). Al salir de la fábrica hidráulica un canal de desagüe vuelve el agua al río.

He aquí algunas instalaciones importantes :

Salto elevados. — En *Fully* (Suiza) : salto de 1650m, turbinas Pelton de 3m,55 de diámetro ; potencia 3000 HP. cada una. En *Amsteg* (Suiza), rueda Pelton de 14000 HP.

En *Chapareillan* (Isere, Francia), salto de 600m, potencia 1000 caballos.

En *Lancey* (Isere, Francia), salto de 200m, potencia 5000 caballos.

En *Fresno* (California), salto de 420m, 3 ruedas turbinas de 1m,45 de diámetro, 600 vueltas, y de 550 caballos cada una.

Salto del Niágara. — El salto mide 50 metros de altura.

Niágara Falls Co : dos fábricas de 10 y 14 turbinas de 5000 caballos cada una.

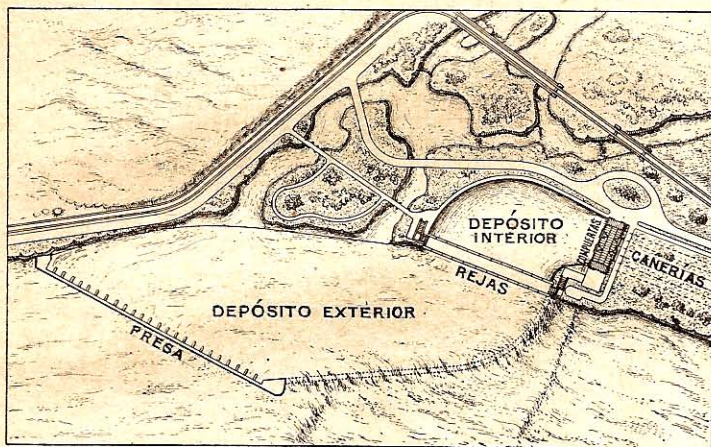


Fig. 93. — Presa de la fábrica *The Ontario Power Co.* — Saltos del Niágara.

Presa primera para detener los hielos y cuerpos flotantes : 183^m de largo.

Dique con rejas de hierro para detener cuerpos pequeños.

Compuertas de regulación.

Tuberías : Diámetro 6^m50, longitud 1920^m.

La fábrica posee 21 grupos de 10000 y 12000 caballos o sean 234000 caballos.

Niagara Falls Hydraulic Power : 13 turbinas de 10000 HP. cada una.

Canadian Niagara Power Co : 11 unidades de 10000 caballos.

Ontario Power Co : 21 turbinas y 234000 caballos.

Electrical Development Co : 11 unidades de 12000 caballos.

Otras instalaciones. — *Canal de Jonage*, cerca de Lyon (Francia). Desviación del Ródano : longitud total 19^{km} ; salto de 11 metros : 16 turbinas de 1250 y 1500 caballos cada una (fig. 194).

Chevres, cerca de Ginebra, sobre el Ródano : salto de 8^m,50 en invierno y de 4^m,25 en verano ; 5 turbinas en invierno y 10 en verano ; potencia total, respectivamente 6000 y 4000 caballos.

Susquehanna (Estados Unidos) : 10 unidades de 13500 caballos cada una.

Hudson River Water Power Co : 8 turbinas de 3500 caballos y 2 de 2800.

Centrales hidroeléctricas. — La mayoría de estas instalaciones sirven para la producción y el transporte de la energía eléctrica a gran distancia.

Por ejemplo, la Niágara Falls C^o reparte corriente para el alumbrado y la tracción en Búfalo, a 43 kilómetros de la central, y la Ontario Power, hasta Syracuse, a 230 kilómetros.

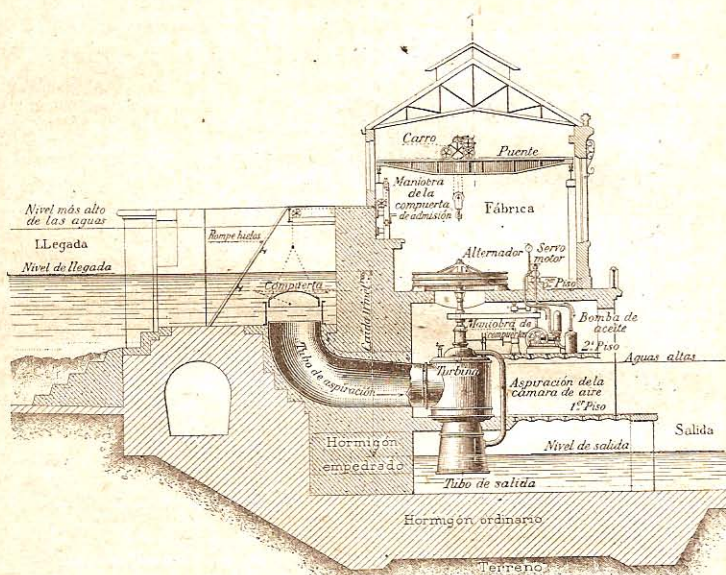


Fig. 194. — Canal de Jonage. — Corte transversal de la central.
Instalación de una unidad generatriz de 1250 caballos.

Existe el proyecto de utilizar los saltos del Ródano en Francia, cerca de Bellegarde, para transportar la energía eléctrica hasta París.

§ 3. — MÁQUINAS DE VAPOR

216. Máquinas térmicas. — Las *máquinas térmicas* transforman el calor en trabajo mecánico. Esta transformación se efectúa en los motores industriales por medio del vapor de agua, del gas del alumbrado, de los hidrocarburos de petróleo, del aire caliente.

Toda *máquina térmica*, de ciclo completo se compone de tres órganos esenciales :

El *hogar*, donde el combustible comunica al fluido una energía calorífica ;

El *cilindro*, donde los gases calientes gastan su energía en producir un trabajo útil :

El *refrigerante* o *condensador*, donde el fluido pasa después de haber trabajado, y de donde vuelve al hogar para repetir el ciclo de sus transformaciones.

I. — Calderas.

217. Calderas de vapor. — En las *máquinas de vapor*, el generador de vapor de agua es independiente del cilindro; se llama *caldera*.

Las calderas pueden dividirse en :

- 1º Calderas cilíndricas, de hervidores o de hogar interior;
- 2º Calderas semitubulares;
- 3º Calderas tubulares;
- 4º Calderas multitubulares o de tubos de agua.

218. Calderas cilíndricas; de hogar interior; semi-tubulares.

— **Calderas cilíndricas.** — Las *calderas de hervidores* se componen de un cuerpo cilíndrico y de uno o dos hervidores de pequeño diámetro colocados bajo el primero y unidos con él. El conjunto está encerrado en un revestimiento de ladrillos poco conductor del calor. El hogar está debajo de los hervidores; los gases calientes circulan alrededor del cuerpo de la caldera y salen por último por la chimenea. La conducción de estas calderas es fácil, pero su peso y su volumen son considerables.

Calderas de hogar interior. — Se instalan uno o varios hogares en tubos interiores al cuerpo cilíndrico. Estas calderas contienen gran volumen de agua, lo que da gran regularidad en la producción del vapor. Son muy empleadas en la industria.

Tipos principales. — Calderas : Cornualles, Lancashire, Galloway (fig. 195), en que unos tubos cilíndricos facilitan la circulación del agua hacia la parte superior.

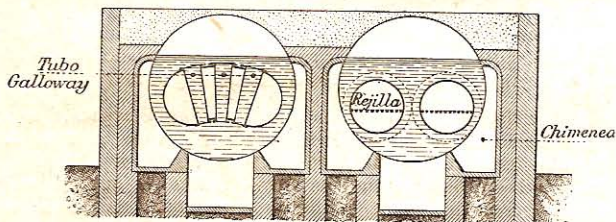


Fig. 195. — Calderas Galloway.

Calderas semi-tubulares. — Son calderas de hervidores cuya superficie de calefacción se aumenta con tubos por los que circulan los gases calientes (fig. 196).

Estos tubos se obstruyen con el hollín. Se construyen semi-tubulares de tubos de agua (tipo Lagosse), menos empleadas que las de tubos de humo.

219. Calderas tubulares y multitubulares. — Calderas tubulares. — Fueron inventadas por Marc Seguin * quien tomó patente para ellas en 1828

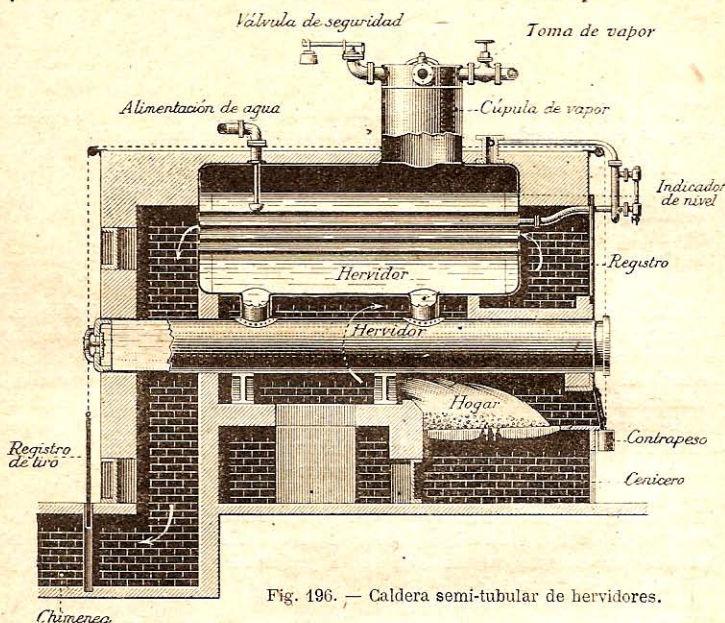


Fig. 196. — Caldera semi-tubular de hervidores.

La rejilla está colocada en el interior del cuerpo cilíndrico, y los tubos de humo están dispuestos, ya directamente a continuación del hogar (tipo locomotora) (fig. 200), ya encima (calderas de retorno de llama, tipo marino) (fig. 197).

La gran superficie de calefacción de las calderas tubulares reduce su peso, facilita su puesta en presión y permite una combustión activa. Estas cualidades les dan preferencia en los ferrocarriles y la marina.

Calderas multitubulares. — El haz de tubos está expuesto exteriormente a la acción de los gases del hogar, mientras que el agua circula por el interior de los tubos y arrastra hasta el colector el vapor formado.

La industria las utiliza porque son *inexplosibles*, ya que un accidente solo puede acarrear la rotura de un tubo en lugar de ocasionar una explosión o desgarradura del cuerpo cilíndrico.

Sin embargo los accidentes de tubos de agua seguidos de muerte han sido bastante numerosos.

La marina aprecia su gran ligereza, la rapidez de su puesta en presión, la actividad de la combustión y la presión elevada del vapor.

Según el modo de circulación del agua se clasifican en calderas :

De *circulación libre* (Naeyer, Babcock, Mathot, Buttner, Niclausse) (fig. 198);

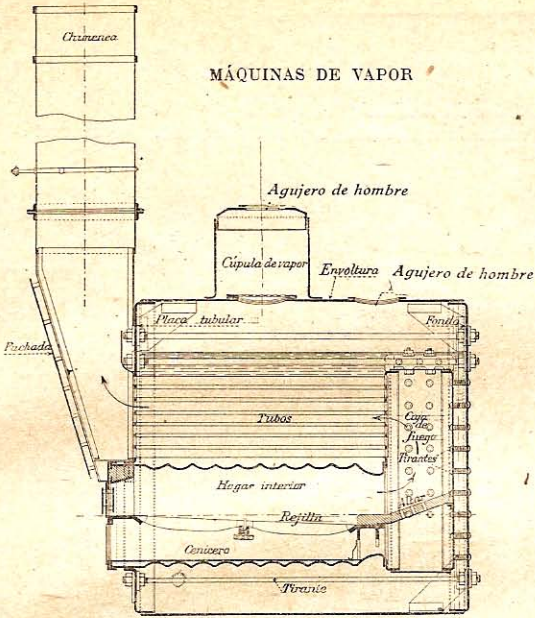


Fig. 197. — Caldera tubular (tipo marino).

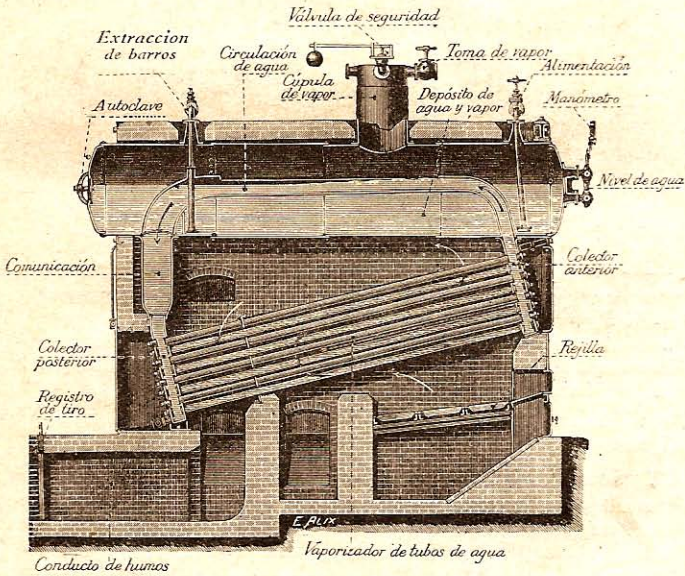


Fig. 198. — Caldera multitubular. Tipo Buttner.

De *circulación limitada* (Belleville) (fig. 199);
De *circulación acelerada* (Yarrow, Normant, Thornycroft).

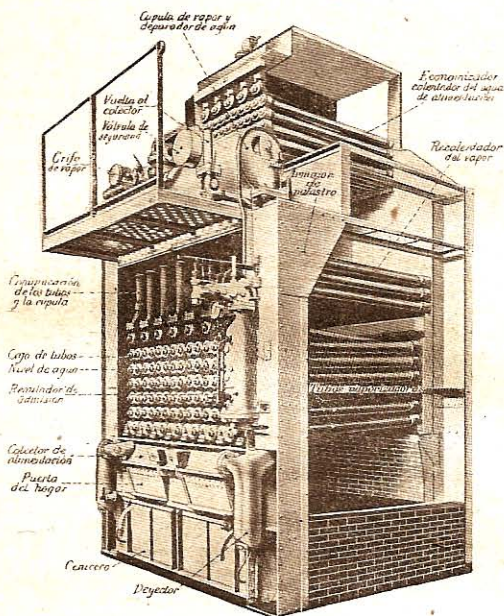


Fig. 199. — Caldera multitubular marina, sistema Belleville.

I. — Máquinas de émbolo.

220. Clasificación de las máquinas de vapor. — 1º Según su movimiento cinemático se distinguen: las *máquinas de émbolo* y las *máquinas rotativas*, cuyo tipo industrial es la *turbina*;

2º Según el modo de acción del vapor: las máquinas de *simple expansión* o *monocilíndricas*, y las máquinas de *múltiple expansión* (de doble, triple o cuádruple expansión);

3º Según su destino: las *máquinas de fábrica*, las *locomotoras*; las *máquinas marinas*.

Máquinas de fábrica. — Las máquinas de émbolo de las fábricas son:

Las *máquinas locomóviles*, montadas sobre ruedas (fig. 200),

Las *semifijas* de caldera fija,

Las *máquinas fijas*, de caldera independiente.

Esta última categoría, la más numerosa, comprende: las máquinas de

correderas planas (fig. 201); las de llaves oscilantes, género Corlis (fig. 202); de válvulas (fig. 203), según la forma del órgano que distribuye el vapor al cilindro.

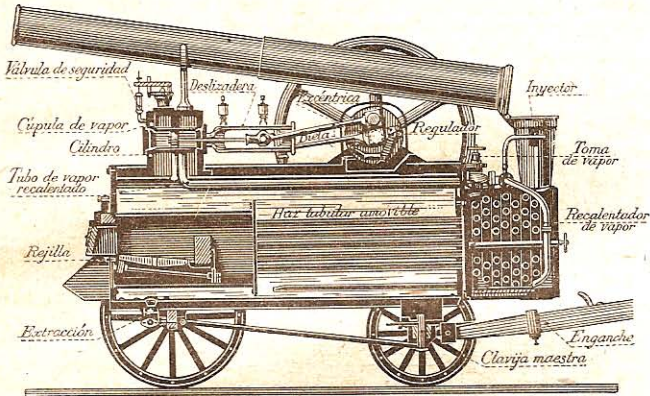


Fig. 200. — Locomóvil.

Máquinas marinas. — Las máquinas marinas de émbolo son *verticales*, en los barcos de hélice, e *inclinadas*, en los de ruedas. Generalmente son de expansión múltiple y de condensación.

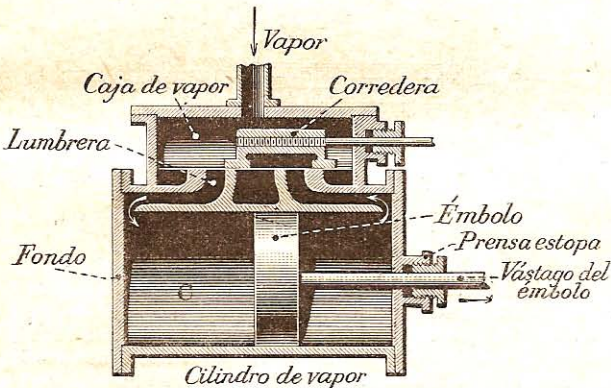


Fig. 201. — Máquina de corredera plana. — Detalles del cilindro.

Las máquinas marinas tienen una carrera proporcionalmente menor que las de fábrica, con objeto de realizar una rotación más rápida de las hélices. Su potencia por unidad llega hasta 20000 caballos.

Locomotoras. — Se distinguen :

Las locomotoras de *gran velocidad*, para los trenes de viajeros.

Las de *pequeña velocidad*, para los pesados trenes de mercancías.

Las primeras arrastran de 200 a 300 toneladas con una velocidad que varía entre 60 y 100 kilómetros, las segundas, de 600 a 700 toneladas, con una velocidad de 30 a 45 kilómetros.

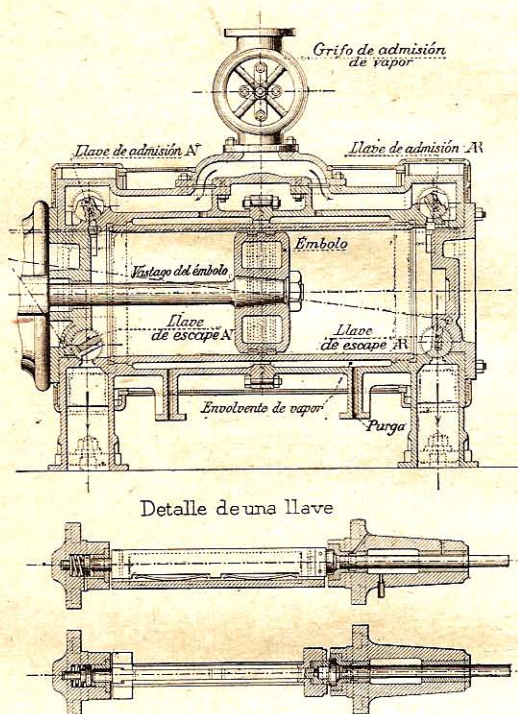


Fig. 202. — Máquina Corliss, de llaves oscilantes.

Los motores, generalmente en número de dos, son de simple o doble expansión, sin condensación : el vapor se escapa por la chimenea y activa el tiro. La colisa para el cambio de marcha es generalmente del tipo Walschaerts. En dicha colisa, la excéntrica que acciona la corredera está acunada en el eje de modo que el radio de excentricidad forme con el manubrio un ángulo recto.

Su potencia alcanza a veces 2000 caballos.

La caldera y los cilindros motores están montados sólidamente sobre un bastidor de largueros metálicos. Las ruedas están acopladas por medio de bielas (fig. 74), mientras que, en la parte anterior, un *bogie* facilita el paso de la locomotora por las curvas.

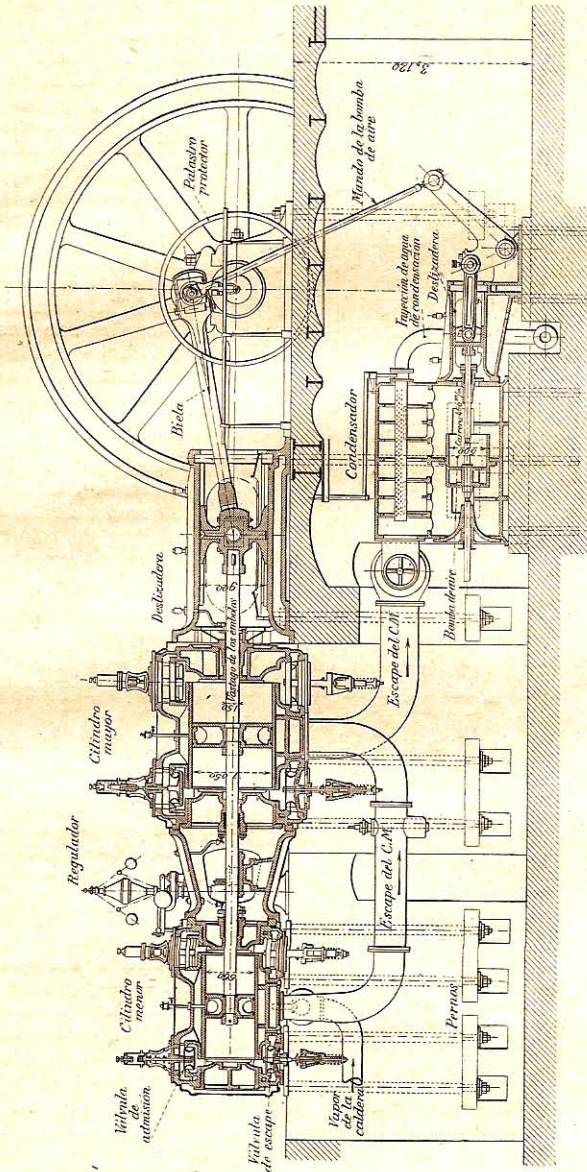


Fig. 203. — Máquina de válvulas, de doble expansión y de condensación.

221. Distribución del vapor por corredera plana. — La corredera más sencilla es la *corredera de concha T*: es una especie de caja rectangular sin tapadera e invertida, con dos rebordes A y B, que se desliza sobre

la superficie (*espejo*) de la caja de vapor (fig. 204).

Dicha caja está provista de tres orificios rectangulares o *lumbreras*: la del medio *b*, *lumbarrera de escape*, comunica con la atmósfera o con un condensador; las otras dos, o *lumbreras de admisión*, comunican con los dos extremos del cilindro.

En la posición media de la corredera, los rebordes *olabios* cubren las dos lumbreras de admisión; la anchura *e* es el *recubrimiento exterior*, la anchura *i* el *recubrimiento interior*.

Con ellos se obtienen:

1º Una *expansión* que disminuye el gasto de vapor y hace más económica la marcha;

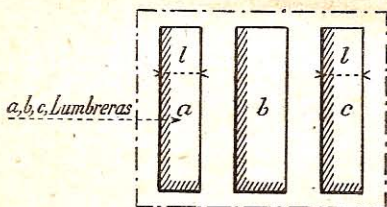
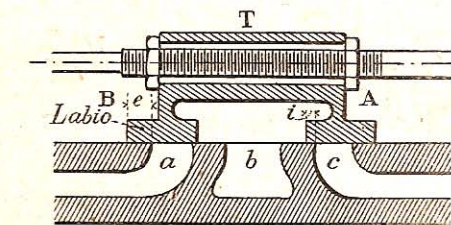


Fig. 204. — Corredera y lumbreras de un cilindro de vapor.

2º Una *compresión* que disminuye los choques de las piezas en movimiento.

Se regula la distribución de una máquina de vapor por medio de la anchura de los rebordes, como vamos a verlo en el estudio de las posiciones de la corredera.

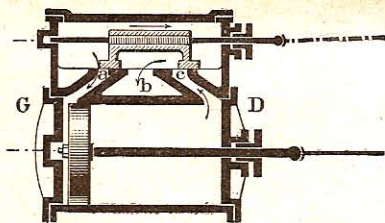


Fig. 205. — 1ª posición de la corredera.

La lumbarrera de la izquierda *a*, está ya ligeramente abierta, por efecto del avance a la admisión, para que se admita el vapor en el cilindro algo antes de llegar el pistón al primer punto muerto.

Examinemos, para el ciclo completo, lo que pasa a izquierda del émbolo.

222. Funcionamiento de la distribución por corredera. — 1ª posición (fig. 205).

— *Primer punto muerto*: Avance a la admisión: El émbolo va a empezar su carrera hacia la derecha.

2ª posición (fig. 206). — *Corredera en final de carrera. Plena admisión del vapor.*

La corredera continúa su camino hacia la derecha. Al terminarlo, la lumbrera de admisión *a* y la de escape *c* están completamente abiertas.

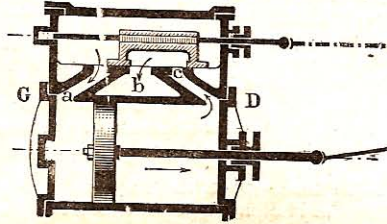


Fig. 206. — 2ª posición de la corredera.

3ª posición (fig. 207). — *Fin de la admisión; Expansión del vapor.*

La corredera, que ha empezado su marcha atrás, cierra la lumbrera de admisión *a*.

Cesa la admisión del vapor. Éste se expande en el cilindro hasta el final de la carrera del émbolo, mientras que, a la derecha del mismo, prosigue el escape por la lumbrera *c*.

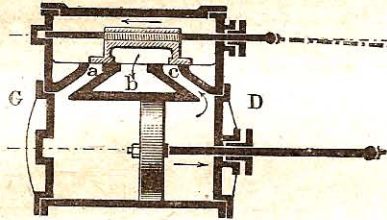


Fig. 207. — 3ª posición de la corredera.

4ª posición (fig. 208). — *Segundo punto muerto; Avance al escape.* El émbolo termina su carrera hacia la derecha.

La lumbrera de la izquierda ha empezado a abrirse por efecto del avance al escape análogo al avance a la admisión (1ª posición).

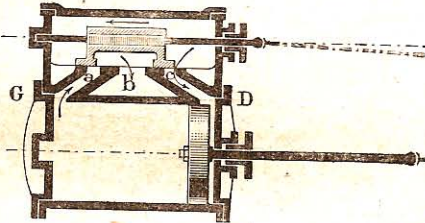


Fig. 208. — 4ª posición de la corredera.

5ª posición (fig. 209). — *Fin del escape; Compresión del vapor.* La corredera termina su carrera hacia la izquierda y luego vuelve hacia la derecha. Su recubrimiento interior cierra la lumbrera de la izquierda y cesa el escape. A partir de dicho momento, el émbolo continuando su marcha comprime el vapor que ha quedado en el cilindro.

Cuando el émbolo alcanza el primer punto muerto, empieza un nuevo ciclo.

En resumen, durante una vuelta completa del árbol motor en

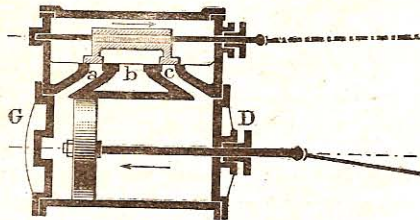


Fig. 209. — 5ª posición de la corredera.

el cilindro y del mismo lado del émbolo, *v. g.* el izquierdo, se realizan los 4 fenómenos siguientes :

Carrera de ida : 1. Admisión, 2. Expansión ;
Carrera de vuelta : 3. Escape, 4. Compresión.

Los fenómenos estudiados para el lado izquierdo del émbolo se reproducen para el lado derecho, con un intervalo de tiempo que corresponde a una carrera del émbolo o a media vuelta del volante.

223. Trabajo en una máquina a plena presión. — El vapor se admite en el cilindro durante toda la carrera.

Sean $S = \frac{\pi D^2}{4}$ la superficie del émbolo en cm^2 ; C la carrera del émbolo en metros, p la presión de admisión del vapor en una de las caras del émbolo, p' la contrapresión en la otra cara; dichas presiones son expresadas en kg. por cm^2 ($p' = 1^{\text{kg}}, 20$ próximamente para el escape al aire libre, y $p' = 0^{\text{kg}}, 30$ para el escape en un condensador).

Determinemos el trabajo que produce el vapor sobre el émbolo :

Trabajo durante una carrera. — El efecto motor en kg. es :

$$F = (p - p') S.$$

El trabajo de esta fuerza constante, durante una carrera C es pues :

$$\tau = F \cdot C = (p - p') SC \text{ kilográmetros.}$$

Siendo la máquina de doble efecto, el trabajo obtenido sobre las dos caras del émbolo es 2τ .

Trabajo por segundo. — Sea n el número de vueltas por minuto; el trabajo será :

$$\mathfrak{E} = 2\tau \cdot \frac{n}{60 \times 75} = \frac{(p - p') SCn}{30 \times 75} = \frac{(p - p') Sv}{75} \text{ cab. vapor ;}$$

pues la velocidad del émbolo : $v = \frac{Cn}{30}$ metros.

Problema. — ¿ Cuál es el trabajo de una máquina a plena presión sin condensación? $D = 0^{\text{m}}, 20$; $C = 0^{\text{m}}, 40$; $n = 225$ vueltas; $p = 5 \text{ kg}$; $p' = 1^{\text{kg}}, 25$.

$$\text{La superficie del émbolo } S = \frac{\pi D^2}{4} = 314 \text{ cm}^2, 16.$$

$$\text{La velocidad del émbolo } v = \frac{Cn}{30} = 3^{\text{m}}.$$

$$\text{El trabajo obtenido } \mathfrak{E} = \frac{(5 - 1,25) \times 314,16 \times 3}{75} = 47^{\text{cab}}, 12.$$

224. Diagrama teórico de una máquina de expansión. — E vapor no se admite sino durante una fracción de la carrera.

Entonces las presiones disminuyen a medida que se distiende el vapor. Se admite que las presiones y los volúmenes obedecen a la ley de **Mariotte** : *El producto de la presión p del vapor por el volumen v que ocupa queda constante durante la expansión.*

Esta ley $pv = C^{\text{te}}$ puede representarse con una curva figurativa.

Referida a dos ejes Op para las presiones y Ov para los volúmenes, dicha curva es una *hipérbola equilátera* que sirve para encontrar el *diagrama teórico del trabajo* (179).

Trazado del diagrama. — Las abscisas DC' y AB (fig. 210) representan, a la escala del dibujo, la carrera del émbolo y el período de admisión; las ordenadas OA y OD , las presiones p y p' de la caldera y del condensador. Tracemos AE y $C'E$, dividamos BE en partes iguales, seis por ejemplo, y tracemos un haz de convergentes de vértice O . Los puntos de la curva de expansión BC están en la intersección de dos líneas paralelas a los ejes de coordenadas.

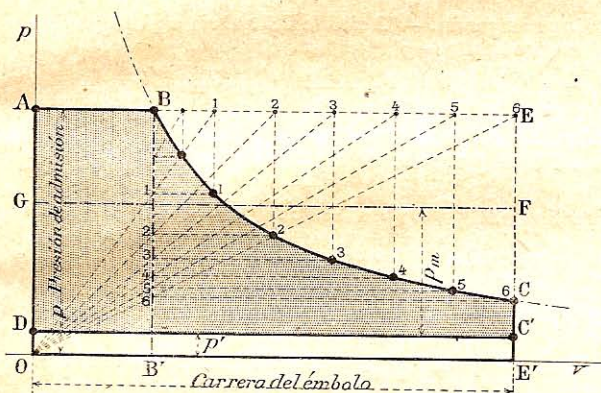


Fig. 210. — Trazado del diagrama teórico del trabajo.

El diagrama del trabajo es entonces $ABCC'DA$.

225. Trabajo de una máquina de expansión. — Presión media.

— La *presión media* p_m es una presión tal que el trabajo a plena presión, medido por el rectángulo $GFC'D$ del diagrama es equivalente al trabajo con expansión representado por la superficie $ABCC'D$.

Sean p y p' la presión de admisión y la contrapresión de escape, en kg. por cm^2 ; Δ la fracción de carrera correspondiente a la admisión:

$$\Delta = \frac{AB}{AE}.$$

La definición de p_m da:

$$\text{Superficie } GFC'D = ABB'O + BCE'B' - OE'C'D.$$

Siendo la curva BC una hipérbola, se tiene:

$$\text{Superficie } BCE'B' = \text{Superficie } ABB'O \times \text{Log hip. } \frac{1}{\Delta}.$$

$$\text{De donde } p_m = p \Delta \left(1 + \text{Log hip. } \frac{1}{\Delta} \right) - p' = p \Sigma - p'.$$

He aquí un cuadro de los valores de:

$$\Delta \left(1 + \text{Log hiperbólico } \frac{1}{\Delta} \right) = \Sigma.$$

Δ	Σ	Δ	Σ	Δ	Σ	Δ	Σ
0,10	0,330	0,30	0,661	0,50	0,846	0,75	0,966
0,125	0,385	0,333	0,700	0,55	0,879	0,80	0,979
0,15	0,435	0,35	0,717	0,60	0,906	0,85	0,988
0,20	0,522	0,40	0,767	0,666	0,937	0,90	0,995
0,25	0,597	0,45	0,810	0,70	0,949	0,95	0,999

Trabajo por segundo. — El cálculo del trabajo a plena presión se aplica aquí, reemplazando $(p - p')$ por p_m .

Se tiene :
$$\mathfrak{S} = \frac{p_m S v}{75} \text{ cab. vapor.}$$

Problema. — ¿Cuál es el trabajo de una máquina de expansión y condensación? $D = 0^m,20$; $C = 0^m,40$; $n = 200$ vueltas; $\Delta = 0,50$; $p = 5 \text{ kg}$; $p' = 0^{\text{kg}},3$.

La presión media $p_m = 5^{\text{kg}} \times 0,816 - 0^{\text{kg}},3 = 3^{\text{kg}},93$.

La velocidad del émbolo $v = \frac{Cn}{30} = 2^m,666$.

El trabajo por segundo $\mathfrak{S} = \frac{3,93 \times 314,16 \times 2,666}{75} = 43^{\text{cab}},89$.

Observación. — La expansión y la condensación disminuyen el consumo de vapor.

Comparemos las dos máquinas de plena admisión y de expansión.

El volumen del vapor consumido en una vuelta o sea por doble cilindrada es :

Con plena admisión : $V_1 = 0^m,031416 \times 0^m,40 \times 2 = 0^m,025133$;

Con expansión $\Delta = 0,50$: $V_1 = 0,5 \times 0^m,025133 = 0^m,012567$.

El volumen de vapor consumido por hora :

Con plena admisión ($n = 225$ vueltas) : $V = V_1 \times 225 \times 60 = 339^m,3$;

Con expansión $\Delta = 0,50$ ($n = 200$ vueltas) : $V' = V'_1 \times 200 \times 60 = 150^m,8$.

O sea por caballo hora : $\frac{339,3}{47,12} = 7^m,2$ y $\frac{150,8}{43,89} = 3^m,5$.

226. Diagrama real. Indicador de Watt. — El diagrama (fig. 210) es teórico; los diagramas reales se obtienen automáticamente en las máquinas con el *indicador de Watt*.

El tipo de Richard es uno de los más conocidos (fig. 211). En un cilindro A se mueve un émbolo P, muy ligero que comprime un muelle R y está unido con un paralelogramo articulado. Este paralelogramo se halla provisto de un portalápiz C que se aplica sobre un tambor T móvil alrededor de su eje, y cubierto de una hoja de papel.

El aparato se pone en comunicación con los fondos del cilindro de vapor por medio de un enchufe y un grifo de tres direcciones, y con el vás-

tago del émbolo por medio de una cuerda que mueve el tambor. Se empieza por trazar la *línea atmosférica* sobre la hoja de papel; luego se hace comunicar el indicador sucesivamente con los dos fondos del cilindro, mediante el grifo. Entonces el vapor empuja el émbolo, y éste mueve el lápiz delante del papel.

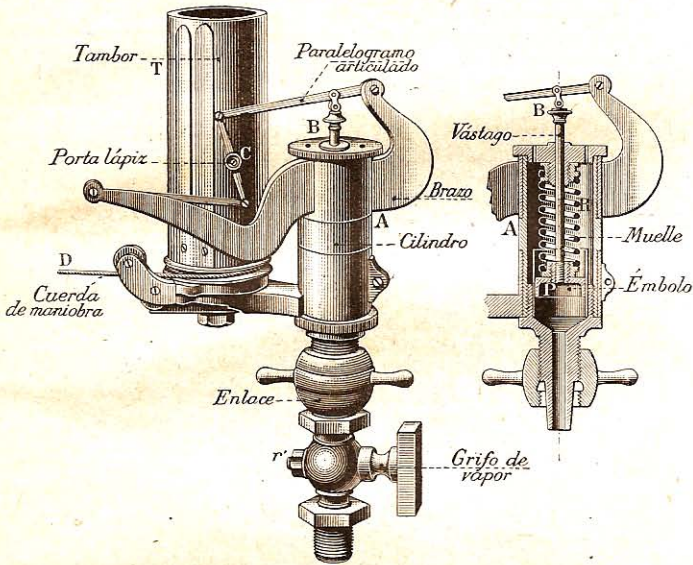


Fig. 211. — Indicador de presión de Richard.

Los movimientos verticales del émbolo P, traducidos por el lápiz C son proporcionales a las variaciones de presión y los movimientos horizontales del papel son proporcionales a las variaciones de volumen del vapor. Se obtienen así los *diagramas reales* de presión sobre una y otra cara del émbolo motor (fig. 212).



Fig. 212. — Diagrama doble obtenido con el indicador para ambas caras del émbolo.

Estos diagramas sirven para medir la *presión media*, la cual se obtiene determinando la superficie por medio del método de los trapecios (179).

III. — Turbinas de vapor.

227. Turbinas de vapor. — Parsons* (1884) y Laval* (1892) son los principales inventores de las turbinas de vapor.

Estos motores rotativos son análogos a las turbinas hidráulicas. El vapor guiado por una tobera o *distribuidor fijo* obra sobre los álabes de un *receptor móvil* y le imprime un movimiento rápido de rotación. *El vapor cede su energía cinética que se transforma en trabajo útil* (fig. 213).

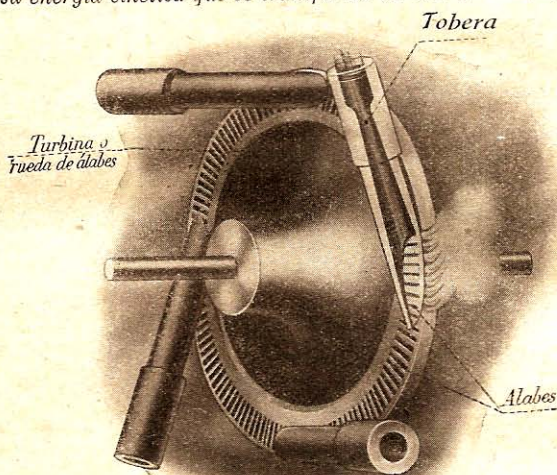


Fig. 213. — Acción del vapor en una turbina de Laval.

Las turbinas presentan ventajas especiales: producen grandes potencias con un peso y volumen mínimos; su rotación es perfectamente regular y muy rápida; el consumo de vapor suele ser inferior al de las mejores máquinas de émbolo.

Convienen para las centrales de electricidad para mover las dinamos y los alternadores, y en la marina para la propulsión de los buques. Es verdad que, no siendo reversibles, hace falta una turbina especial para la marcha atrás de las hélices, pero es este un inconveniente ligero en comparación de las ventajas.

228. Turbina de Laval. — El motor descansa, sobre un zócalo, el mecanismo está encerrado en cajas protectoras (fig. 214).

La turbina o rueda móvil, de acero niquelado, gira a velocidades vertiginosas: 24000 vueltas por minuto para un motor de 10 caballos cuya rueda tiene 12^{cm} de diámetro, 7500 vueltas para 300 caballos y 70^{cm} de diámetro. Unos engranajes cilíndricos, de dentadura helicoidal reducen la velocidad a 2400 vueltas para 10 caballos y a 800 vueltas para 300 caballos en el árbol secundario.

Una de las particularidades reside en la forma del árbol motor, que es flexible, de gran longitud y débil diámetro (5mm para 10 caballos, 30mm para 300 caballos).

Un regulador de fuerza centrífuga, colocado en el árbol secundario, obra sobre el obturador de admisión.

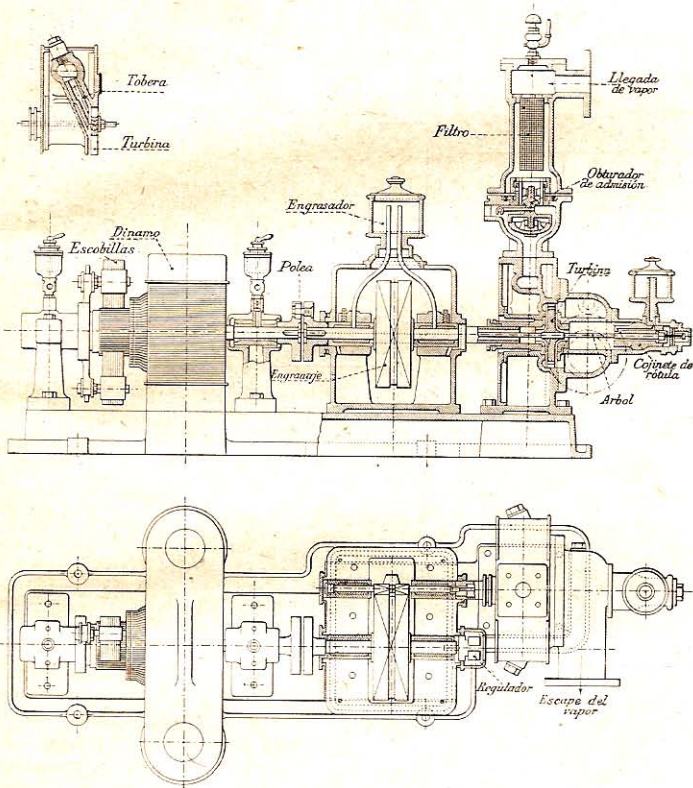


Fig. 214. — Turbina de Laval.

Un engrase abundante es necesario para todos los órganos, particularmente para los cojinetes y los engranajes.

229. Turbina de Parsons. — La *turbina de Parsons* es de expansión múltiple con *escalonamientos de presión*, en un gran número de ruedas móviles (unas 80). Resulta de ello una economía en el consumo de vapor y una reducción del número de vueltas del árbol.

Esta turbina comprende tres partes esenciales: el tambor, el árbol con las ruedas motrices, el aparato de regulación (fig. 215).

El tambor, fundido con sus soportes y las coronas de álabes directores, está dividido en dos partes con unión longitudinal que facilita el montaje y la inspección.

El árbol motor lleva las coronas de álabes motores alternados con los directores; las coronas son de diámetro creciente, pues el volumen del vapor aumenta a medida que se expansiona. El conjunto del árbol y de los álabes receptores constituye el *rotor*, completamente de acero; los álabes motores son de bronce.

El trazado de los álabes se estudia con esmero para que los filetes de vapor entren sin choque en las ruedas móviles.

El árbol motor sufre un empuje axial en el sentido de la circulación del vapor; este empuje se atenúa con los émbolos compensadores. Por último un soporte de graduación permite regular el juego entre los álabes (3 a 4 mm), y soportes especiales aseguran la hermeticidad entre el árbol y la turbina.

La admisión del vapor y su regulación se logran por medio de un servomotor muy ingenioso, accionado por el árbol motor mediante un regulador. Un aparato de seguridad provoca el cierre automático de la válvula de admisión cuando crece la velocidad de modo anormal.

Una bomba especial distribuye a los cojinetes aceite con una presión de $1\frac{1}{2}$ kg por cm^2 . Se observará que ninguno de los órganos que sufren rozamiento está en contacto con el vapor; el agua de condensación no contiene pues lubricante, lo cual es una ventaja para la alimentación de las calderas multitubulares, generalmente empleadas en una instalación de turbinas.

§ 4. — MOTORES DE GAS Y DE PETRÓLEO

230. Motores de explosión. Ciclo de cuatro tiempos. —

Los motores de explosión son máquinas térmicas cuyo *hogar* es el cilindro mismo; los gases quemados se escapan a la atmósfera.

El primer motor industrial se debe a Lenoir*; fué ensayado en el Conservatorio de Artes y Oficios de París, en 1860. El gas del alumbrado, inflamado por una chispa eléctrica, trabajaba con expansión a media carrera y sin compresión. Este motor era de doble efecto y de distribución por corredera movida por una excéntrica.

Se notó pronto que la compresión previa del gas antes del encendido mejoraba el rendimiento térmico. El ciclo de los *motores de compresión* fué descrito en 1862 por Beau de Rochas, y realizado industrialmente por Otto* en 1867.

El motor Otto perfeccionado, ha llegado a convertirse en el tipo de la mayor parte de los motores de explosión; su *ciclo* es de *cuatro tiempos* (fig. 216).

1er tiempo. Aspiración. — El émbolo adelanta hacia el árbol y, mediante la válvula de admisión *a*, aspira el gas mezclado con aire o el aire carburado con petróleo; la válvula de escape *e* permanece cerrada por la acción de un muelle.

2º tiempo. *Compresión.* — Al retroceder, el émbolo comprime el fluido que acaba de aspirar, pues la admisión se ha cerrado exactamente en el punto muerto de la derecha; la compresión aplica las dos válvulas contra su asiento.

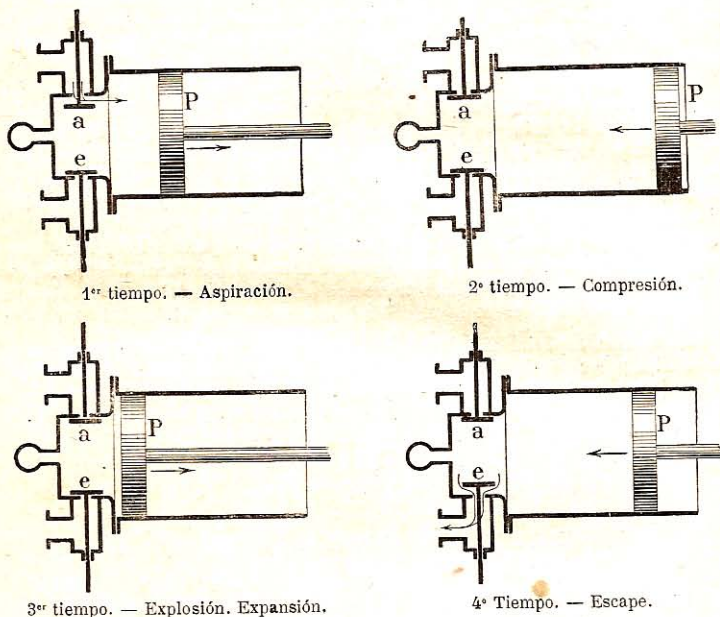


Fig. 216. — Ciclo de cuatro tiempos.

3º tiempo. *Explosión y expansión.* — En el punto muerto de la izquierda, el gas experimenta una compresión máxima. En dicho instante, salta la chispa de encendido, inflama bruscamente la mezcla gaseosa que hace explosión, impulsa violentamente el émbolo y se expande produciendo trabajo.

4º tiempo. *Escape.* — Después de la carrera motriz, el émbolo vuelve por segunda vez hacia la cámara de combustión, expulsando los gases quemados; la válvula de escape *e* está abierta de antemano, algo antes del punto muerto de la derecha; se cierra exactamente en el de la izquierda.

231. Descripción de los motores. — Los motores de explosión que funcionan con el gas del alumbrado o el petróleo pulverizado y mezclado con el aire en proporción conveniente se inflama directamente en el cilindro mediante una chispa eléctrica o una llama.

La mayor parte de estos motores son de simple efecto (fig. 217). El árbol recibe el movimiento del émbolo por el mecanismo biela manubrio; la deslizadera se suprime generalmente y la biela se articula

con el émbolo hueco. Dos *válvulas* sirven para la admisión del fluido en el cilindro o para la evacuación de los gases quemados; están accionadas por *levas*. En los motores pequeños, la válvula de admisión es a veces automática y se abre por aspiración.

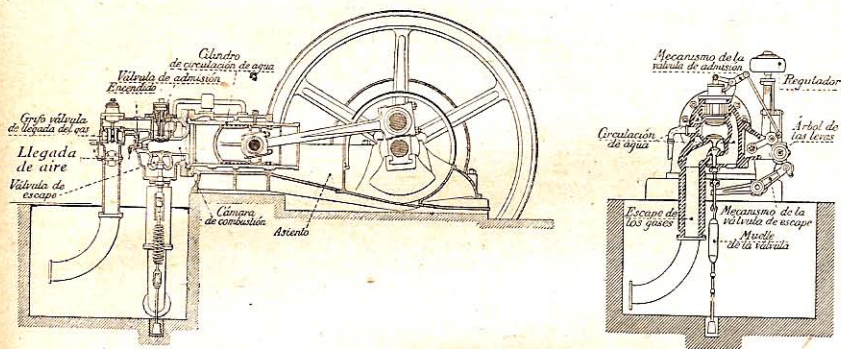


Fig. 217. — Motor de gas Duplex.

En este motor de cuatro tiempos, el cilindro, la cámara de combustión y las válvulas están enfriados por circulación de agua. El regulador obra sobre el grifo-válvula de mezcla. El gas del alumbrado y el gas pobre pueden emplearse como combustibles.

El espacio comprendido entre el fondo o *culata* del cilindro y el émbolo al final de la carrera, constituye la *cámara de compresión*. Reducida al volumen de la cámara de compresión, la mezcla explosiva es inflamada

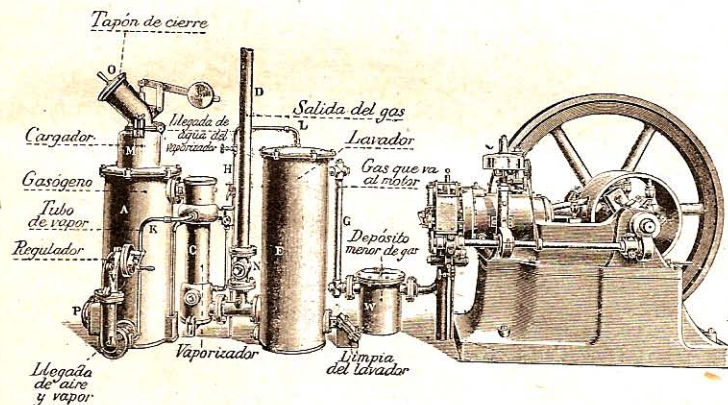


Fig. 218. — Instalación de un gasógeno de aspiración para antracita.

por la bujía eléctrica o el encendedor. La temperatura muy elevada producida por la combustión (1500° por lo menos) obliga a enfriar el cilindro, ya con aletas, ya por circulación de agua.

diante la disociación del agua en presencia del cok o de la antracita incandescentes. Las instalaciones son de *aspiración* o de *presión*, conforme es el motor que aspira el fluido o un ventilador que lo rechaza hacia el cilindro.

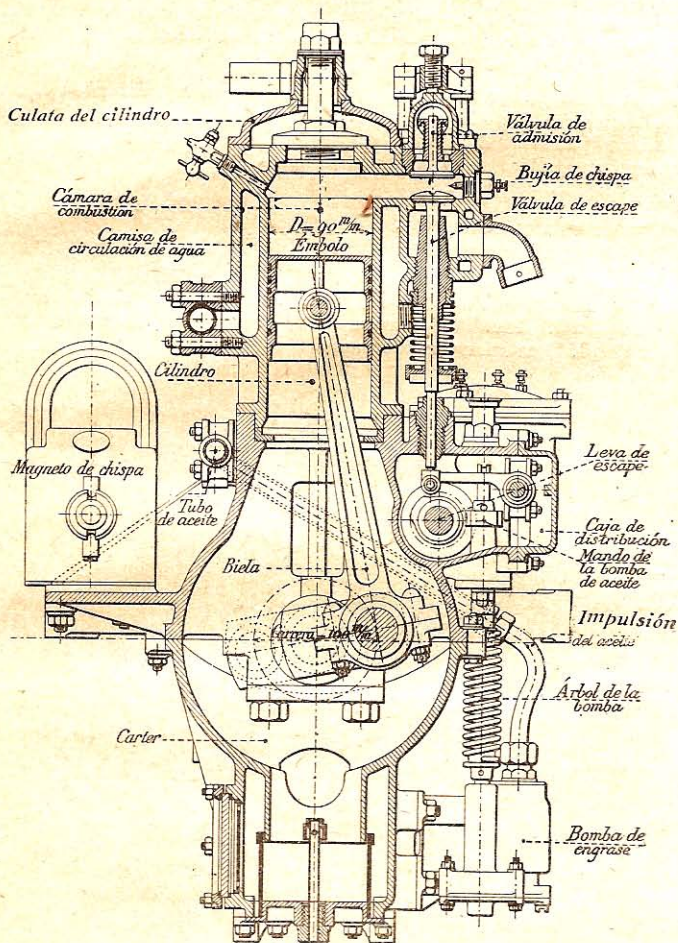


Fig. 220. — Motor de esencia para automóvil.

La potencia calorífica del gas pobre es por término medio 1300 calorías por metro cúbico. Corresponde a la composición siguiente: 27 % de óxido de carbono, 7 % de anhídrido carbónico, 18 % de hidrógeno, 47 % de

nitrógeno e indicios de metano. En dichos motores la mezcla del aire y de gas pobre se hace en proporción casi igual.

233. Motores de petróleo. — En 1864, ensayó Lenoir* un motor de esencia de petróleo; Brayton*, ingeniero americano, construyó, en 1872, un motor de petróleo; Hock tomó una patente en Viena, en 1873, para un motor de petróleo bruto que Diesel* había de industrializar en 1898.

La ventaja de los motores de petróleo consiste en la facilidad de compra y de transporte del fluido combustible, y en el engrase del cilindro por el mismo petróleo. El empleo de las esencias volátiles presenta, sin embargo, un peligro de explosión y de incendio.

Estos motores son de dos géneros :

- 1º Los *motores* industriales: de *petróleo refinado* o de *petróleo bruto* ;
- 2º Los *motores* para automóvil y aviación: de *esencia de petróleo*.

Motores de petróleo refinado (fig. 219). — El petróleo refinado es un aceite que sirve para el alumbrado; retírase, por destilación, del petróleo bruto. Rico en hidrocarburos, tiene una potencia calorífica media de 10500 calorías por kilogramo.

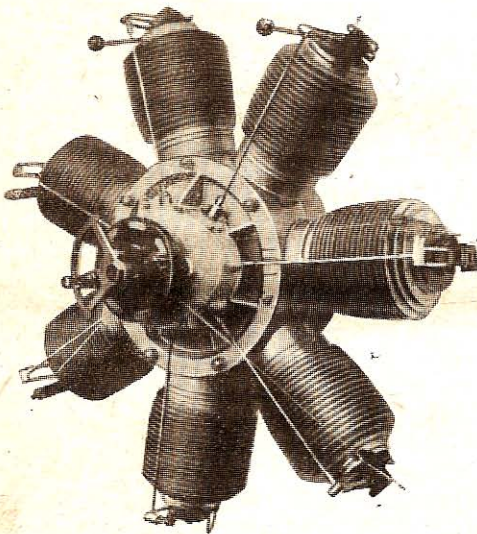


Fig. 221. — Motor Gnome, de 50 caballos, para la aviación.

Este modelo se compone de 7 cilindros montados en estrella sobre bastidor único. El conjunto gira con la hélice.

Los motores de petróleo difieren poco de los motores de gas; funcionan según el ciclo de cuatro tiempos.

En los motores pequeños hay carburadores-vaporizadores, y en los grandes, gasógenos-destiladores, que sirven para carburar el aire antes de su admisión en el cilindro ($3m^3$ de aire por litro de petróleo).

Motores de automóvil y de aviación (fig. 220 y 221). — El combustible es la *esencia* sacada de la primera destilación del petróleo bruto; es un líquido muy volátil: densidad 0,70; potencia calorífica 11000 calorías por kilogramo.

La carburación se logra haciendo borbotar el aire en el combustible, o mejor dirigiendo un chorro de éste, suficientemente dividido, al través de la corriente de aire que produce la aspiración del motor.

Estos motores son de cuatro tiempos y muy ligeros (Se ha llegado a un peso inferior a $1kg$ por caballo). Su construcción ha de ser muy esmerada, con materiales de calidad excepcional.

234. Motor Diesel (fig. 222). — Funciona con petróleo refinado o con

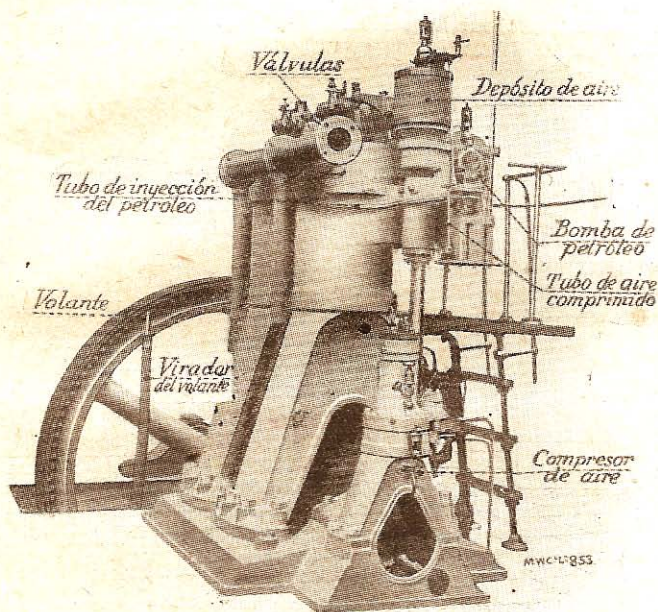


Fig. 222. — Motor Diesel, con su compresor de aire.

petróleo bruto. El *ciclo Diesel*, de cuatro tiempos, difiere algo del ciclo Otto. En el primer tiempo, sólo el aire es aspirado en el cilindro, llevándose su com-

presión hasta 40 kg por cm^2 durante el segundo tiempo ; el calor desarrollado es tal que el combustible, inyectado bajo presión, al principio del tercer tiempo, se inflama espontáneamente. Los gases quemados son expulsados en el cuarto tiempo por la válvula de escape. Hay pues un período motor, cada cuatro, como en el ciclo de Otto.

El motor Diesel comprende : un compresor de aire accionado por la máquina misma, y una bomba de petróleo sometida a la acción de un regulador. Existen dos válvulas de admisión : una para el aire aspirado, otra con pulverizador para el combustible.

El aire comprimido a unos 60 kg por cm^2 , en un depósito que comunica con la válvula de admisión del combustible, inyecta el petróleo en la cámara de combustión, al empezar el tercer tiempo. El pulverizador permanece abierto, durante un 10% de la carrera.

Los submarinos son casi todos movidos por motores de petróleo del tipo Diesel.

235. Diagrama teórico de los motores de cuatro tiempos. — El volumen de la cámara de combustión es proporcional a OA' , y el de la cilindrada a $A'B'$ (fig. 223).

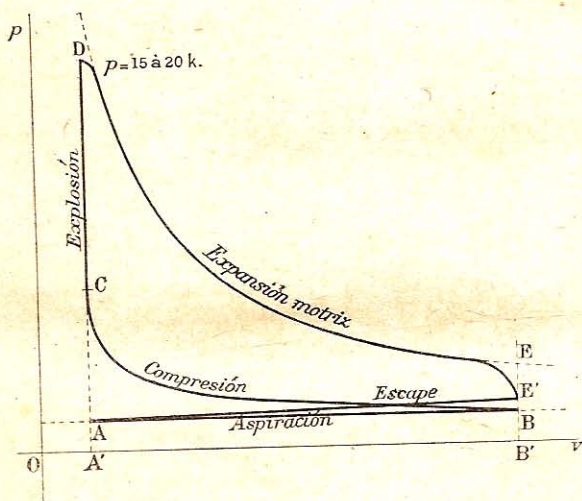


Fig. 223. — Diagrama teórico de un motor de cuatro tiempos.

En el *primer tiempo* : aspiración de la mezcla de aire y de gas, figurada por la *línea atmosférica* AB.

En el *segundo tiempo* : compresión del gas, sin pérdida ni aumento de calor, según la curva BC, hasta que el volumen quede reducido al de la cámara.

En el *tercer tiempo*: explosión, producida por la inflamación casi instantánea de la mezcla, que eleva la presión de C a D; va seguida de la expansión DE o período motor.

En el *cuarto tiempo*: expulsión de los gases quemados, a presión sensiblemente constante y algo superior a la atmosférica. Generalmente la expansión no llega hasta dicha presión; hay pues una caída brusca EE', seguida del escape EA.

En resumen *el trabajo teórico efectuado por el fluido combustible en el cilindro se mide por el área del ciclo cerrado ABCDEE'A.*

236. Trabajo de los motores de explosión. — Se mide la *presión media de los diagramas reales*, obtenidos directamente con el indicador de Watt, por el método de los trapecios (226, 179).

Cálculo de la potencia. — Sean:

n el número de explosiones por minuto (número de vueltas $n = 2m$),

p_m la presión media en kg. por cm^2 ,

S la sección del émbolo en cm^2 ,

C la carrera del émbolo en metros.

La potencia en caballos:
$$\mathcal{P} = \frac{p_m S C m^1}{60 \times 75}$$

Problema. *Un motor de fábrica tiene las características siguientes:*

Diámetro del émbolo o del cilindro: 0^m,480.

Carrera del émbolo: 0^m,700.

Número de explosiones por minuto: 75.

Presión media: 4^{kg},70.

¿Cuál es su potencia?

$$\mathcal{P} = \frac{4^{\text{kg}},7 \times 1809^{\text{cm}^2},6 \times 0^{\text{m}},7 \times 75}{60 \times 75} = 99^{\text{cab}},22 \text{ indicados.}$$

Admitamos un rendimiento mecánico de 0,75, la potencia útil será:

$$\mathcal{P}_u = 99,22 \times 0,75 = 74^{\text{cab}},41 \text{ efectivos.}$$

¹ Entre las fórmulas prácticas propuestas para el cálculo de las potencias de los motores de cuatro tiempos, citaremos la muy sencilla del Sr. Garnier: $P = D^2 \times C.n.k$, en que las dimensiones están expresadas en centímetros y el coeficiente k varía habitualmente entre 0,000 0040 y 0,000 0045.

Aplicada al motor estudiado, da:

$$P = 48^2 \times 70 \times 150 \times 0,000\ 0041 = 99 \text{ cab. } 19.$$

PROBLEMAS ¹

CINEMÁTICA

CINEMÁTICA TEÓRICA

§ 1. — Movimiento uniforme.

1. — *La velocidad del sonido en el aire es 340^m por segundo. El silbido de una locomotora es percibido por un observador después de $2^s \frac{1}{4}$. — ¿ A qué distancia se encuentra del observador?*

R. : 765^m .

2. *Un viajero ha recorrido $25^{\text{km}},920$ en 6 horas. — ¿Cuál es su velocidad por segundo?*

R. : $1^m,20$.

3. — *Un ciclista lleva una velocidad de $7^m,20$ por segundo. — ¿ En cuánto tiempo habrá recorrido 756^m ?*

R. : 105^s , o $1^m,45^s$.

4. — *La distancia de París al Havre es 228^{km} . — ¿ Cuáles son las velocidades medias, por segundo y por hora, de dos trenes que salvan esta distancia el primero entre las 8 y 25 y las 11 y 10, el segundo entre las 13 y 18 y las 17 y 44?*

R. : $23^m,030$ o $82^{\text{km}},909$; $14^m,285$ o $51^{\text{km}},428$.

5. — *Calcular en metros la milla geográfica, la legua marina y la milla marina, que son respectivamente iguales a $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{20}$ y $\frac{1}{60}$ del arco de un grado del meridiano terrestre.*

Utilícese la definición del metro dada en aritmética.

R. : 7407^m ; 5556^m ; 1852^m .

¹ Se encontrarán problemas tipos en el *Tratado* mismo o en el *Solucionario* del tratado de *Mecánica teórica y práctica*.

6. — *Un buque lleva una velocidad de 23 nudos o millas marinas por hora. — ¿ En cuánto tiempo habrá recorrido $927 \frac{2}{3}$ leguas marinas ?*

R. : 5^d, 1^h.

7. — *Estúdiese, por medio de diagramas, el movimiento de dos automóviles que recorren la misma carretera recta, con velocidades constantes de 60 y 40 kilómetros por hora; su distancia mutua es 25 kilómetros en el instante inicial. — Determinense gráficamente: 1º el instante de su encuentro; — 2º El espacio recorrido por cada uno de ellos.*

Solución obtenida por medio de dos rectas concurrentes.

R. : 75^{min}; 75^{km} y 50^{km}.

§ 2. — Movimiento uniformemente acelerado.

8. — *¿Cuál es la profundidad de un pozo, sabiendo que una piedra, cayendo libremente, llega al fondo en 5 segundos ($g = 9,81$)?*

R. : 122^m,625.

9. — *Una piedra tirada verticalmente en un pozo de 590^m,50 de profundidad, llega al fondo en 10^s. — ¿Cuál es la velocidad inicial?*

R. : 10^m.

10. — *¿Cuál es la velocidad, al final de la caída, de un móvil que cae libremente de 300^m de altura?*

R. : 76^m,72.

11. — *Un móvil partiendo del reposo, se mueve con una aceleración constante de 4^m. — Se pregunta: 1º La velocidad del móvil al cabo de 15 segundos; — 2º El espacio recorrido en dicho tiempo.*

R. : 60^m y 450^m.

12. — *¿Cuánto tiempo necesita un cuerpo para caer libremente de una altura de 176^m,58?*

R. : 6^s.

13. — *Un tren tarda 30 segundos para alcanzar una velocidad de régimen de 54^{km} por hora. — Calcúlense: 1º la aceleración durante el arranque; — 2º el espacio recorrido durante dicho tiempo.*

R. : 0^m,50 y 225^m.

14. — *¿Cuál es la altura recorrida durante el 7º segundo de caída de un móvil abandonado sin velocidad inicial?*

R. : 63^m,765.

15. — *Un cuerpo cae libremente partiendo del reposo; recorre, durante el último segundo de su caída, el tercio de la altura total. — Calcúlese el tiempo de caída y la altura total.*

El espacio recorrido durante el último segundo es :

$$h' = \frac{1}{2} g [t^2 - (t-1)^2] .$$

R. : 5s $\frac{3}{4}$ y 145m,69.

16. — Un proyectil se lanza de abajo arriba con una velocidad de 100m por segundo. — ¿A qué altura llegará, y en cuántos segundos?

R. : 509m,683 y 10s $\frac{2}{10}$.

17. — Un móvil, lanzado según la vertical, se eleva a 1103m,625. 1º ¿Con qué velocidad ha sido lanzado? — 2º ¿Cuál es el tiempo de la ascensión?

R. : 147m,15 y 15s.

18. — Un proyectil, lanzado verticalmente, vuelve al punto de partida al cabo de 20 segundos. — ¿Cuáles son la velocidad inicial y la altura alcanzada?

R. : 98m,10 y 490m,50.

19. — Dos cuerpos caen de un mismo punto a 2s de intervalo. — ¿Cuál es la distancia que los separa al cabo de 2, 5, 10 segundos de caída?

R. : 58m,86 ; 117m,72 ; 215m,82.

20. — Dos proyectiles se lanzan del mismo punto, de abajo arriba, a 6s de intervalo, con una velocidad inicial de 49m,05. — ¿En qué instante, y a qué altura se encontrarán?

Escribáanse las ecuaciones del movimiento de los móviles, e igualense los dos valores del espacio.

R. : 2s y 78m,48.

§ 3. — Movimiento circular.

21. — Un volante de 5m de diámetro da 90 vueltas por minuto. — ¿Cuál es la velocidad de la llanta?

R. : 23m,562.

22. — La velocidad circunferencial de una polea, de 3m de diámetro, es igual a 15m,75. — Determínese la velocidad angular.

R. : 5m,25.

23. — Una sierra circular de 0m,30 de radio da 10 vueltas por segundo. — ¿Cuáles son las velocidades angular y circunferencial?

R. : 62m,83 y 18m,85.

24. — La velocidad circunferencial de una rueda de esmeril de $0^m,50$ de diámetro es $10^m,472$. — ¿Cuántas vueltas da por minuto?

R. : 400^v .

25. — ¿Cuál es el diámetro de un volante que da 120 vueltas por minuto, y cuya velocidad es $28^m,274$?

R. : $4^m,50$.

26. — Las ruedas motrices de una locomotora tienen $1^m,80$ de diámetro; su velocidad angular es $16^m \frac{2}{3}$. — Suponiendo que no haya ningún deslizamiento, ¿cuál será: 1º el espacio recorrido por la locomotora en una hora; — 2º el número de vueltas de cada rueda durante dicho tiempo?

R. : 54^{km} y $9549^v,3$.

27. — Una rueda hidráulica de 4^m de diámetro gira con una velocidad de $1^m,60$ en la circunferencia. — Determinense: La velocidad angular de la rueda; — 2º el número de revoluciones por minuto.

R. : $0^m,80$ y $7^v,64$.

28. — Se desea cilindrar en un torno un árbol de 100^{mm} de diámetro, con una herramienta cuya velocidad de corte alcanza $0^m,40$ por segundo. ¿Cuál ha de ser el número de vueltas del árbol por minuto?

R. : $76^v,4$.

29. — Calcular la velocidad angular de rotación de la tierra suponiéndola esférica.

El día sideral cuenta 86164 segundos.

R. : $0^{\text{cm}},00729$.

30. — Determinar la velocidad angular y la aceleración centrípeta del minutero en un reloj.

R. : $\omega = \frac{2\pi}{60^2}$ y $\gamma = \frac{4\pi^2 r}{60^4}$.

31. — Un cable de 5^{cm} de diámetro y de 300^{m} de largo, se arrolla alrededor de un tambor de $2^m,95$ de diámetro con una velocidad de 5^{m} por segundo. — Determinense el número de vueltas y la anchura del tambor.

R. : $31^v,83$ y $1^m,60$.

§ 4. — Composición de los movimientos.

32. — Un proyectil, lanzado horizontalmente desde lo alto de una torre con una velocidad de 60^{m} , cae a 180^{m} del pie de la torre. — ¿Cuál es la altura de la torre?

La componente horizontal permite hallar el tiempo de caída.

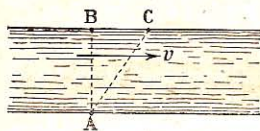
R. : $44^m,145$.

33. — Una cascada, de $122^m,625$ de altura, sirve de desagüe a una presa vertical. El agua deja el vertedero horizontal con una velocidad de 5^m por segundo. — ¿A qué distancia del pie de la presa llegará al suelo?

R. : 25^m .

34. — Un dirigible, que navega en aire tranquilo con una velocidad de 72^{km} por hora, encuentra una corriente de 15^m por segundo, perpendicular a su derrotero. — ¿De qué ángulo se desviará? — ¿Qué velocidad tendrá?

R. : $36^{\circ},50'$ y 25^m por segundo.



35. — Un barco atraviesa un río cuya corriente tiene una velocidad de 3 metros por segundo. Parte del punto A, bajo un ángulo de 45° y en una dirección opuesta a la de la corriente. — ¿Cuál ha de ser su velocidad constante para que aborde en el punto B?

R. : $3\sqrt{2} = 4^m,242$.

36. — Un nadador, que recorre 1^m por segundo, atraviesa un río de 100^m de ancho, nadando en dirección perpendicular a las orillas. — Se pregunta: 1^o La posición del punto C en que abordará; 2^o la longitud del camino AC. — La velocidad de la corriente es $0^m,50$ por segundo.

R. : $BC = 50^m$; $AC = 111^m,80$.

CINEMÁTICA APLICADA

§ 1. — Engranajes.

37. — Dos ruedas de fricción tienen 30^{cm} y 45^{cm} de diámetro. La primera da 105 vueltas por minuto. — ¿Cuántas dará la segunda?

R. : 70 vueltas.

38. — Dos cilindros de fricción, de los cuales uno tiene 30^{cm} de diámetro, deben dar respectivamente 120 y 600 vueltas por minuto. — ¿Qué diámetro ha de darse al segundo cilindro?

R. : 6^{cm} .

39. — Dos árboles paralelos, cuyos ejes distan 42^{cm} , dan 90 y 120 vueltas por minuto. — Calcúlese el diámetro de los dos cilindros de fricción que han de establecerse.

R. : 48^{cm} y 36^{cm} .

40. — Un engranaje tiene 270^{mm} de diámetro y 30 dientes. — ¿Cuál es su paso diametral? — ¿Y el circunferencial?

R. : 9 módulos o 28^{mm},27.

41. — ¿Cuál es el número de dientes de una rueda de 390^{mm} de diámetro y de módulo 6?

R. : 65 dientes.

42. — ¿Cuál es el diámetro de una rueda de 50 dientes y de módulo 12?

R. : 600^{mm}.

43. Un piñón de 15 dientes, que da 300 vueltas por minuto, transmite el movimiento a una rueda de 60 dientes. — Calcúlese el número de vueltas de la rueda.

R. : 75 vueltas.

44. — Entre dos árboles paralelos separados de 0^m,40 se quiere establecer un tren de ruedas dentadas de módulo 10 con una relación de velocidad de 1/3. — Determinense los diámetros primitivos y el número de dientes de cada rueda.

R. : 200^{mm} y 600^{mm}, 20 y 60 dientes.

45. Un tren está compuesto de dos pares de engranajes. El primero comprende una rueda de 80 dientes y un piñón de 16; el segundo una rueda de 60 dientes y un piñón de 20. — ¿Cuál es la velocidad del segundo piñón cuando la primera rueda da 30 vueltas por minuto?

R. : 450 vueltas.

46. — En un torno de filetear, la relación entre el paso p del tornillo que ha de fabricarse al paso P del tornillo patrón, es igual a la relación entre el número n de dientes de la rueda motriz, al número N de dientes de la rueda conducida. — Elegir los engranajes que permitan ejecutar una rosca de 10^{mm} con un tornillo patrón de 12^{mm}.

R. : $\frac{10}{12} = \frac{15 \text{ dientes}}{18 \text{ dientes}} = \frac{20 \text{ dientes}}{24 \text{ dientes}} = \frac{30 \text{ dientes}}{36 \text{ dientes}} = \dots$

47. — Cuando las ruedas motrices y conducidas forman un tren de engranajes se reemplaza n y N por los productos de los números de dientes. — Elijanse los trenes que permitan filetear una rosca de 12^{mm},6 con un tornillo patrón de 10^{mm}.

R. : $\frac{12.6}{10} = \frac{3 \times 6 \times 7}{2 \times 5 \times 10} = \frac{30 \text{ dientes}}{20 \text{ dientes}} \times \frac{60 \text{ dientes}}{50 \text{ dientes}} \times \frac{70 \text{ dientes}}{100 \text{ dientes}}$

48. Un cambio de velocidad, instalado en dos árboles distantes 60^{cm}, está constituido por tres pares de engranajes. El árbol motor da 300 vueltas y lleva piñones de 20, 30 y 40 dientes; el árbol conducido tiene ruedas de 100, 90 y 80 dientes, que engranan respectivamente con

los piñones. — Se pregunta: 1° los diámetros de las ruedas y de los piñones; — 2° el módulo de los engranajes; — 3° los números de vueltas del árbol conducido.

R.: 1° 200^{mm} y 1000^{mm}; 300^{mm} y 900^{mm}; 400^{mm} y 800^{mm}.

2° 10 módulos = 31^{mm},42;

3° 60, 100 y 150 vueltas.

49. — Un engranaje de tornillo sin fin reduce de 200 a 5 el número de vueltas de dos árboles. El paso es de 9 módulos. — ¿Cuál es el número de dientes y el diámetro de la rueda helizoidal de un filete?

R.: 40 dientes y 360^{mm}.

50. — Trazar un engranaje cicloidal. — Los diámetros primitivos son 260^{mm} y 130^{mm}, el módulo 10, el espesor de los dientes = 15^{mm}, su altura 9^{mm}, su profundidad 11^{mm}.

51. — Trazar el mismo engranaje, con las dentaduras de flancos rectilíneos.

Aplíquese el teorema de Lahire.

52. — Trazar un engranaje de evolvente de círculo. — El diámetro primitivo de la rueda es 360^{mm}, y la relación entre las velocidades 3. Módulo 12. Dientes: espesor 18^{mm}, altura 11^{mm}, profundidad 13^{mm},5.

53. — Trazar una cremallera de evolvente. El piñon tiene 300^{mm} con paso de 12 módulos.

§ 2. — Levas y poleas.

54. — Determinar el perfil de la leva que produce sobre el vástago guiado un ascenso y un descenso uniformes, separados por dos reposos, siendo iguales los cuatro periodos ($1/4$ de vuelta). — Trazar las curvas representativas.

55. — Determinar el perfil de una leva que produce: una ascensión uniforme de $1/6$ de vuelta, un descenso uniforme de $1/3$ de vuelta, separados por reposos de $1/4$ de vuelta. — Trácese las curvas representativas.

56. — Trazar las curvas representativas del movimiento de una leva que produce una ascensión primero uniformemente acelerada, luego uniformemente retardada, seguida de un descenso uniforme de igual duración que la ascensión.

57. — Trazar una leva Morin, y sus curvas representativas, para obtener una ascensión dos veces más rápida que el descenso.

58. — ¿Cuál es el desarrollo de una bicicleta de cadena cuya rueda posterior tiene 70^{cm} de diámetro, si los piñones están en la relación de $1/3$?

R.: 6^m,597.

59. — *La transmisión en una bicicleta acatena está constituida por ruedas de ángulo. Los conos del pedal tienen 30 y 15 dientes, los conos de la rueda motriz, 18 y 12 dientes. — Calcúlese el desarrollo cuando la rueda motriz tiene $0^m,65$ de diámetro.*

R. : $6^m,126$.

60. — *Las dos poleas de una transmisión por correas tienen 60^{cm} y 72^{cm} de diámetro. — ¿Cuál es el número de vueltas de la segunda cuando la primera da 180?*

R. : 150 vueltas.

61. — *Igual problema, teniendo en cuenta un deslizamiento de la correa de 2% .*

R. : 147 vueltas.

62. — *Determinar el diámetro de una polea de dinamo que ha de dar 450 vueltas por minuto. La polea motriz tiene 936^{mm} de diámetro y gira a 100 vueltas por minuto. El deslizamiento de la correa es de 4% .*

R. : 200^{mm} .

63. — *Un árbol de transmisión da 120 vueltas por minuto; lleva un cono de 4 poleas escalonadas de 12^{cm} , 15^{cm} , 18^{cm} y 21^{cm} . Un cono semejante está colocado sobre un torno, pero en sentido inverso. — ¿Cuáles serán las velocidades del árbol conducido? El deslizamiento se supone nulo.*

R. : 210^v , 144^v , 100^v y $68^v,5$.

64. — *Establecer un sistema de poleas entre dos árboles. El árbol motor lleva una polea de 45^{cm} de diámetro y da 100 vueltas; el árbol conducido ha de dar 1200 vueltas.*

R. : Poleas en el árbol intermedio de 15^{cm} y 40^{cm} (relación de velocidades $1/3$).

Polea en el árbol conducido de 10^{cm} (relación de velocidades $1/4$).

65. — *Un torno cilindra una pieza de 30^{mm} de diámetro con una velocidad de corte de $9^m,425$ por minuto. El árbol motor da 90 vueltas por minuto y lleva una polea de 40^{cm} de diámetro. — 1º ¿Cuál es el número de vueltas de la pieza? — 2º ¿Qué polea hay que instalar en el árbol del torno?*

R. : 1º 100 vueltas; 2º 36^{cm} .

66. — *En un torno se instala un cono de cuatro poleas escalonadas de 120^{mm} , 150^{mm} , 180^{mm} y 210^{mm} de diámetro; el árbol motor lleva un cono semejante en sentido inverso y da 60 vueltas por minuto. — Para una velocidad de corte de $6^m,60$ por minuto, determinar los diámetros de las piezas que pueden tornearse.*

R. : 20^{mm} , 30^{mm} , 42^{mm} y 60^{mm} .

ESTÁTICA

ESTÁTICA TEÓRICA

§ 1. — Fuerza. Masa.

67. — Una fuerza de 1^{kg} actúa sobre un cuerpo que pesa 4^{kg}. — ¿Cuál es la aceleración que le imprime? ($g = 9,81$).

R. : 2^m,45.

68. — Calcular el espacio y la velocidad, transcurridos 10 segundos?

R. : 122^m,50 y 24^m,50.

69. — ¿Cuál es la intensidad de una fuerza constante que imprime una aceleración de 4^m,905 a un cuerpo de 1^{kg}?

R. : 0^{kg},5.

70. — Por la acción de una fuerza constante, un cuerpo de 1^{kg} ha recorrido 490^m,5 en 5 segundos. — ¿Cuál es la intensidad de dicha fuerza?

R. : 4^{kg}.

71. — Un cuerpo de 1^{kg} ha adquirido una velocidad de 98^m,1 en 5 segundos. — ¿Cuál es la intensidad de la fuerza aceleradora?

R. : 2^{kg}.

72. — Una fuerza de 3^{kg} obra sobre un cuerpo de 1^{kg}, y le hace adquirir una velocidad de 88^m,29. — ¿Cuánto tiempo ha obrado?

R. : 3 segundos.

73. — En la máquina de Atwood los pesos son cada uno de 200 gramos, y el peso adicional de 10. — Se pregunta: 1º La aceleración del movimiento; — 2º el tiempo empleado para recorrer 3^m.

El peso adicional mueve el peso total 410^g.

R. : 0^m,239 y 5 segundos.

74. — Determinar las tensiones del hilo de suspensión de la máquina de Atwood del problema anterior, cuando el sistema está en movimiento. — Sábese que la fuerza de inercia $F = m\gamma$, siempre dirigida en sentido contrario al movimiento, se suma al peso en el movimiento ascendente, y se resta de él en el movimiento descendente.

La fuerza de inercia $F = \frac{200}{9,81} \times 0,239$.

R. : 204^{gr},872 y 205^{gr},128.

§ 2. — Fuerzas concurrentes.

75. — Dos fuerzas rectangulares tienen intensidades de 3kg y 4kg. — Determínese la intensidad y la dirección de la resultante.

R. : 5kg y $26^{\circ} 52' 12''$.

76. — Igual pregunta para fuerzas de 4kg y 5kg, que forman un ángulo de 60° .

R. : 7kg,81 y $26^{\circ} 19' 45''$.

77. — Cuatro fuerzas de 2kg, 3kg, 4kg, 5kg, situadas en el mismo plano, forman entre sí ángulos $F_1F_2 = 120^{\circ}$, $F_1F_3 = 210^{\circ}$ y $F_1F_4 = 45^{\circ}$ en el mismo sentido. — Determínese la resultante R y el ángulo F_1R .

R. : 4kg,16 y $83^{\circ} 29' 40''$.

78. — En una máquina de vapor, el vástago del émbolo soporta un esfuerzo de 10000kg. — Cuando la biela forma un ángulo de 10° con la dirección del vástago, calcúlense : el esfuerzo transmitido a la biela y la presión normal sobre la deslizadera.

R. : 10 154kg,2 y 1 763kg,3.

79. — Una armadura lleva en el vértice S una carga de 1000kg. — ¿Cuáles son los esfuerzos en los pares AS y BS y el empuje horizontal sobre los muros de apoyo? — Los ángulos en A y B son de 30° .

R. : 1000kg y 866kg.

80. — Dos fuerzas de intensidad 2 y $\sqrt{3}$ tienen una resultante de intensidad 1. — ¿Cuáles son los ángulos de las componentes con la resultante?

R. : 60° y 90° .

81. — Descomponer una fuerza de 1kg en dos componentes que formen con la fuerza ángulos de 45° y de 90° .

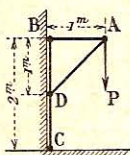
R. : $(\sqrt{2})$ kg y 1kg.

82. — Una fuerza de $(\sqrt{3})$ kg está descompuesta en dos fuerzas iguales que forman entre sí un ángulo de 60° . — ¿Cuál es la intensidad de las componentes?

R. : 1kg.

83. — Tres fuerzas rectangulares iguales están dirigidas según las aristas de un cubo. — Se pregunta : 1^o La intensidad de la resultante; — 2^o Los ángulos iguales que forma con las componentes.

R. : $F\sqrt{3}$ y $54^{\circ} 44' 6''$ $\left(\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$.



84. — Una grúa aplicada a una pared, lleva una carga P. Gira en un collar B y una quicio-nera C. — Determinense: 1º Los esfuerzos según AB y AD; — 2º Las reacciones en B y C.

$$R.: P \text{ y } P\sqrt{2}; \quad \frac{P}{2} \text{ y } \frac{P}{2}\sqrt{5}.$$

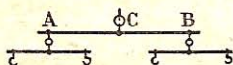
§ 3. — Fuerzas paralelas.

85. — Dos fuerzas paralelas de 10kg y 15kg están aplicadas en los extremos de una recta de 1m,25. — Determinese la intensidad y el punto de aplicación de la resultante.

$$R.: 25\text{kg}; 75\text{cm y } 50\text{cm}.$$

86. — Un peón transporta dos cargas de 50kg y 30kg, equilibradas y suspendidas de una barra horizontal, la más pesada delante de sí, a 45cm del hombro. — ¿Dónde estará colocada la otra carga?

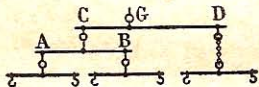
$$R.: 75\text{cm detrás}.$$



87. Un carro está tirado por dos caballos que ejercen respectivamente esfuerzos de 75kg y 90kg en A y B. El balancín AB mide 1m,32. — ¿Dónde ha de fijarse el gancho G?

$$R.: AC=72\text{cm y } BC=60\text{cm}.$$

88. — El tiro anterior está completado por un segundo balancín CD, de 1m,98 de largo, sobre el que obra directamente un tercer caballo. El gancho G está a 77cm del punto C. — Calcúlese la tracción que ejerce el tercer caballo.



$$R.: 405\text{kg}.$$

89. — Dos obreros llevan una carga de 120kg suspendida de una barra de 0m,96 de largo. — ¿Dónde deben colocarla para que el menos robusto lleve los 5/7 de la carga del otro?

$$R.: A 56\text{cm del menos robusto}.$$

90. — La distancia de las ruedas de una bicicleta es 1m,20 de eje a eje. Los pesos de la bicicleta y del ciclista son fuerzas respectivamente de 12kg y 72kg aplicadas a 70 y a 90cm de la rueda delantera. — ¿Cuáles son las cargas soportadas por las dos ruedas?

$$R.: 23\text{kg y } 61\text{kg}.$$

91. — Un árbol de motor pesa 100kg, descansa sobre soportes A y B distantes 1m,50. A 50cm del soporte A hay un volante de 600kg;

a 15^{cm} del soporte B, una polea de 100^{kg}. — ¿Cuál es la carga correspondiente a cada soporte?

R. : 460^{kg} sobre A ; 340^{kg} sobre B.

92. — Dos fuerzas paralelas y de sentido contrario, una de las cuales vale 30^{kg}, tienen una fuerza resultante de 21^{kg} aplicada a 27^{cm} de la componente conocida y dirigida en el mismo sentido que aquélla. — Determinar la intensidad y la posición de la segunda componente.

R. : 9^{kg} y 63^{cm} de la primera.

93. — Una polea de 140^{kg} está colocada a 30^{cm} en falso sobre un árbol que descansa en dos soportes separados 2^m,10. — ¿Cuáles son las presiones de la polea sobre los soportes?

R. : 160^{kg} y 20^{kg} en sentido contrario.

94. — En los tres vértices de un triángulo se aplican fuerzas paralelas, de igual sentido y respectivamente proporcionales a los lados opuestos. — ¿Dónde está el centro de las fuerzas?

R. : En el centro del círculo inscrito.

§ 4. — Momentos. — Equilibrios.

95. — En el problema n° 84, comprobar el teorema de Varignon tomando los momentos de las fuerzas respecto de los puntos A o B.

96. — Una viga pesa 120^{kg} y descansa sobre soportes A y B separados 5^m. Lleva una carga de 500^{kg} aplicada a 1^m,50 de A. — Determine la reacción sobre los apoyos, tomando los momentos de los pesos y de las reacciones respecto de los puntos A y B.

R. : 410^{kg} y 210^{kg}.

97. — Sobre un mismo árbol se acunian una rueda de engranaje y una polea de 70^{cm} y de 1^m de diámetro. La correa que se arrolla sobre la polea transmite un esfuerzo de 140^{kg}. — ¿Cuál será el esfuerzo tangencial sobre los dientes del engranaje?

R. : 200^{kg}.

98. — Una grúa análoga a la del problema n° 84, está sujeta a la pared por dos collares B y C. — Determine el par formado por las reacciones en B y C.

R. : Par $\left(\frac{P}{2}, \frac{P}{2}\right)$.

99. — Tres fuerzas, concurrentes e iguales, están situadas en el mismo plano ; forman ángulos iguales de 120°. — Demostrar que su resultante es nula.

100. — Tres fuerzas concurrentes, situadas en el mismo plano, tienen intensidades proporcionales a 1, $\sqrt{3}$ y 2 ; los ángulos de la

primera fuerza con las otras dos son 90° y 120° contados en sentido contrario. — Pruébese que el sistema está en equilibrio.

Aplicuese el teorema de las proyecciones de vectores.

101. — A los dos vértices opuestos, A y C, de un paralelogramo ABCD, se aplican fuerzas representadas en dirección, sentido e intensidad por los lados AB y AD, CB y CD. — Demostrar que las cuatro fuerzas se equilibran.

102. — Dado el punto C, encuentro de las medianas de un triángulo ABD, demostrar que las tres fuerzas representadas en dirección, sentido e intensidad por CA, CB y CD están en equilibrio.

Cada fuerza es igual y directamente opuesta a la resultante de las otras dos.

103. — Igual problema de equilibrio, cuando el punto C está en el encuentro de las alturas y que las fuerzas, dirigidas perpendicularmente a los lados del triángulo, son proporcionales a los mismos.

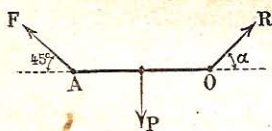
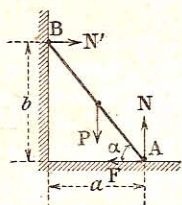
Sean P, Q, R las fuerzas. — Establecer la relación:

$$\frac{P}{\sin A} = \frac{Q}{\sin B} = \frac{R}{\sin D}$$

104. — Una barra AB, de peso P, está apoyada contra una pared vertical y sobre un plano horizontal perfectamente pulimentados. La barra, fija en el punto A, no puede deslizarse. — ¿Cuáles son las reacciones en los puntos A y B?

R.: En A, $N = P$ y $F = N'$.

$$\text{En B, } N' = \frac{P}{2 \operatorname{tg} \alpha} = \frac{Pa}{2b}$$

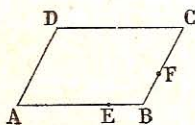


105. — Una barra de peso P, está articulada en uno de sus extremos O. Está mantenida horizontal por una fuerza inclinada a 45° . — Demostrar que dicha fuerza F y su reacción R son iguales e igualmente inclinadas.

$$\text{R.: } R = F = \frac{P\sqrt{2}}{2} \text{ y } \alpha = 45^\circ$$

106. — Estudiar el equilibrio de la grúa del problema n.º 84.

107. — Tres obreros llevan una placa de palastro en forma de paralelogramo ABCD, que pesa 150 kg. El primero está colocado en el vértice D. — ¿Dónde habrán de ponerse los otros para que soporten los obreros cargas respectivas de 60 kg, 45 kg y 45 kg?



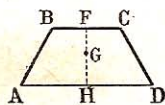
Trazar el triángulo DEF, y señalar el centro de gravedad de la placa.

R. : En los puntos E y F, tales que : $\frac{AE}{AB} = \frac{BF}{BC} = \frac{2}{3}$.

§ 5. — Centros de gravedad.

108. — Tres barras homogéneas forman un semihexágono regular ABCD. — Determinar la posición del centro de gravedad G.

R. : $\frac{GF}{GH} = \frac{1}{2}$.



109. — ¿Dónde se encuentra el centro de gravedad de la superficie de un semihexágono regular?

R. : $\frac{GF}{GH} = \frac{5}{4}$.

110. — De un cuadrado ABCD, de lado a y centro O, se saca el triángulo OAB. — Determinese el centro de gravedad G de los tres triángulos restantes.

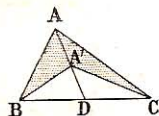
R. : $OG = \frac{a}{9}$.

111. — Sobre un lado de un cuadrado de centro O se construye un triángulo equilátero de igual lado a. — ¿Cuál es la posición del centro de gravedad G de la figura así formada?

R. : $OG = \frac{a(1 + 3\sqrt{3})}{26}$.

112. — De un triángulo ABC se quita un triángulo A'BC cuyo vértice A' es el punto medio de la mediana AD. — ¿Dónde está el centro de gravedad de la porción restante?

R. : En el punto A'.

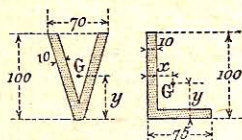


113. — ¿Cuál es el centro de gravedad de un hexágono regular, de centro O y lado a, del que se han sacado dos triángulos parciales contiguos de los seis de vértice O?

R. : $OG = \frac{a}{4}$.

114. — Una hoja de palastro, de espesor uniforme, es un cuarto de círculo, de centro O y de radio r. — Calcúlese la distancia OG al centro de gravedad.

R. : $OG = \frac{4r\sqrt{2}}{3\pi}$.



115. — Determinar los centros de gravedad de las figuras adjuntas :

R. : 1º $y = 52,2$;

2º $x = 19,8$ y $y = 32,3$.

116. Dos conos de revolución, de igual base y de alturas h y h' ($h > h'$), están unidos por su base común O. — Demostrar que el centro de gravedad G está a una distancia

$$OG = \frac{h - h'}{4}.$$

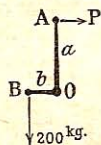
117. — A una caja cúbica de cartón, de centro O y de arista a , se le quita la tapadera. — ¿Cuál es la posición del centro de gravedad de las cinco caras restantes?

R. : $OG = \frac{a}{10}$.

ESTÁTICA APLICADA

§ 1. — Palanca. — Balanza.

118. — Una palanca acodada en ángulo recto se mueve alrededor del eje O; los brazos de palanca son : $a = 50\text{cm}$ y $b = 10\text{cm}$. Se pregunta :



1º La potencia que ha de desarrollarse para equilibrar una resistencia de 200 kg;

2º La presión sobre el eje O.

R. : 40kg y 204kg.

119. — Con una palanca del primer género, larga de $2\text{m},60$, se equilibra una carga de 300kg ejerciendo un esfuerzo de 25kg. — Determinese la longitud de los brazos de la palanca.

R. : 20cm y $2\text{m},40$.

120. — Una carretilla de $1\text{m},20$ de largo lleva una carga de 90kg colocada a 40cm del eje de la rueda. — Calcúlese : 1º la potencia que hay que desarrollar ; — 2º la carga sobre la rueda.

R. : 30kg y 60kg.

121. — La palanca que mueve el émbolo de una bomba de agua es de segundo género y tiene por brazos $p = 1\text{m},20$, $q = 20\text{cm}$. — ¿Cuál es el esfuerzo producido sobre el émbolo por una potencia de 15kg?

R. : 90kg.

122. — Una caldera, timbrada a 10 kg, está provista de válvulas de seguridad de 7 cm de diámetro, que pesan 1 kg,850. — ¿Qué contrapeso hay que suspender en el extremo de la palanca si sus brazos medidos desde el eje de articulación, tienen respectivamente 5 cm y 50 cm?

R.: 38 kg,3.

123. — Las características de una válvula de seguridad son: diámetro 8 cm, peso 1 kg,900; brazos de palanca 10 cm y 60 cm; contrapeso 50 kg. — Determinese el timbre de la caldera.

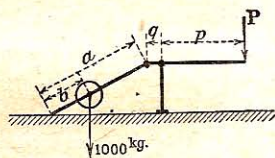
R.: 6 kg.

124. — Un aparato para levantar los carros está formado por dos palancas combinadas. — Los brazos de palanca son: $a = 60$ cm, y $b = 12$ cm.

$$p = 80 \text{ cm, y } q = 8 \text{ cm.}$$

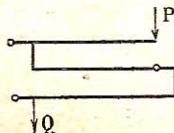
Calcúlese: 1º la potencia necesaria para levantar un coche de 1000 kg; — 2º cuánto habrá subido el coche, cuando haya recorrido la potencia verticalmente 50 cm.

R.: 20 kg y 1 cm.



125. — Una palanca múltiple está formada por tres palancas simples cuyos brazos están en la relación de 1/5. — ¿Qué potencia hay que ejercer para equilibrar una resistencia de 2500 kg?

R.: 20 kg.



126. — Un cuerpo colocado sucesivamente en los platillos de una balanza se equilibra con pesas de 16 gr y 16 gr,81. — Se pregunta: 1º el peso real del cuerpo; — 2º la relación entre los brazos del astil.

R.: 16 gr,4 y $\frac{4,1}{4} = 1,025$.

127. — Los brazos del astil de una balanza tienen respectivamente 355 y 350 mm. — ¿Cuál es el peso real de un cuerpo que se equilibra con 49 gr, en el primer platillo?

R.: 49 gr,7.

§ 2. — Polea. — Torno.

128. — ¿Qué esfuerzo es preciso desarrollar para levantar una carga de 27 kg por medio de una polea cuyo rendimiento es 90 %?

R. : 30 kg.

129. — Un obrero ejerce una potencia de 25 kg sobre el ramal de una polea móvil. — ¿Qué carga puede equilibrar en los casos siguientes : 1º los ramales son paralelos ; — 2º los ramales forman un ángulo de 120° ?

R. : 50 kg y 25 kg.

130. — ¿Qué carga puede levantarse con tres poleas móviles, cuando se ejerce un esfuerzo de 25 kg ? El rendimiento es de 75 %.

R. : 150 kg.

131. — ¿Qué potencia hay que ejercer para equilibrar 64 kg con dos poleas móviles, cuyo rendimiento es 80 % ?

R. : 20 kg.

132. — ¿Qué carga puede levantar un obrero que ejerce un esfuerzo de 30 kg con un polipasto de 6 poleas : 1º No se tienen en cuenta las resistencias pasivas ; — 2º Se admite un rendimiento de 80 % ?

R. : 180 kg y 144 kg.

133. — En los tres problemas anteriores, determínese la altura de elevación de la carga cuando se tira de 6 metros la cuerda.

R. : 0 m,75 ; 1 m,50 ; 1 m.

134. — Determinar el rendimiento de un polipasto de 6 poleas, con el cual dos obreros levantan una carga de 270 kilogramos ejerciendo respectivamente esfuerzos de 25 kg y de 35 kg.

R. : 75 %.

135. — ¿Qué esfuerzo hay que ejercer para equilibrar un peso de 490 kg con un polipasto diferencial ? — Las poleas tienen : 350 mm y 320 mm de diámetro, y el rendimiento es 70 %.

R. : 30 kg.

136. — ¿Qué carga puede levantarse ejerciendo una potencia de 25 kg con un polipasto diferencial ? — Los radios de las poleas son 320 mm y 300 mm ; el rendimiento 75 %.

R. : 600 kg.

137. — El tambor de un torno sencillo tiene 12^{cm} de diámetro, y el manubrio 40^{cm} de radio. — ¿Qué carga puede levantarse con una potencia de 25^{kg} y un rendimiento de 90^{0/0}?

R. : 150^{kg}.

138. — Se desea levantar una carga de 153^{kg} con un torno cuyo tambor tiene 14^{cm} de diámetro y el manubrio 42^{cm} de radio. — ¿Qué potencia hay que ejercer, con un rendimiento de 85^{0/0}?

R. : 30^{kg}.

139. — Dos obreros, que ejercen sobre los manubrios de un torno un esfuerzo de 30^{kg} elevan una carga de 270^{kg}. Los manubrios tienen 45^{cm} de radio; el cable, que se arrolla sobre el tambor, 10^{mm} de diámetro. — Determinar el diámetro de dicho tambor, si el rendimiento es 85^{0/0}.

R. : 16^{cm}.

140. — En el problema anterior, la carga ha de elevarse con una velocidad de 3^m,20 por minuto. — ¿Qué número de vueltas por minuto han de dar los manubrios?

R. : 6 vueltas.

141. — Un torno de canteros, cuyo tambor tiene 26^{cm} de diámetro y cuya rueda mide 6^m de diámetro, está movido por un hombre que pesa 75^{kg}. El brazo de palanca máximo es 0,866 del radio de la rueda (ángulo de 60°); el rendimiento, 80^{0/0}. — ¿Qué peso de piedra puede sacarse de la cantera?

R. : 1200^{kg}.

142. — Cuatro marineros ejercen cada uno un esfuerzo de 36^{kg} en un cabrestante. Las barras tienen 3^m de largo, y el tambor 30^{cm} de diámetro; el rendimiento es 75^{0/0}. — ¿Cuál es el peso del ancla que pueden levantar?

R. : 2160^{kg}.

143. — Los dos tambores de un torno diferencial tienen respectivamente 30^{cm} y 28^{cm} de diámetro; el manubrio 40^{cm} de radio. — ¿Qué carga puede levantarse ejerciendo un esfuerzo de 20^{kg}, con un rendimiento de 70^{0/0}?

R. : 1120^{kg}.

144. — Dos obreros levantan un peso de 2800^{kg} mediante un torno diferencial; los diámetros de los tambores son 32^{cm} y 30^{cm}; el radio de los manubrios, 45^{cm}; la velocidad, 8 vueltas por minuto, y el rendimiento, 65^{0/0}. — Se pregunta: 1° la potencia ejercida por cada obrero; — 2° la velocidad de elevación de la carga por minuto.

R. : 24^{kg} y 50^{cm},26.

145. — Con un torno diferencial, dos obreros levantan una carga de 450kg, desarrollando cada uno esfuerzos de 15kg sobre manubrios de 32cm de radio. — ¿Qué diámetro hay que dar al tambor menor, si el diámetro del mayor es 30cm y el rendimiento 70%?

R. : 27cm.

146. — Un aparato elevador está compuesto de una cabria con polipasto de cuatro poleas y torno sencillo : el tambor tiene 20cm de diámetro, y los dos manubrios 40cm de radio; el rendimiento es de 60%. — Determinense : 1º La potencia que ha de desarrollar cada obrero para levantar una carga de 384kg; — 2º La velocidad de elevación de la carga para 10 vueltas de manubrio por minuto.

R. : 20kg y 1m,571.

147. — En un torno de engranajes, el tambor tiene un diámetro de 25cm, el manubrio un radio de 35cm; la rueda un diámetro de 60cm, el piñón uno de 10cm. — ¿Qué carga puede levantarse ejerciendo una potencia de 25kg, siendo el rendimiento 75%?

R. : 315kg.

148. — En un torno de doble engranaje, el tambor tiene un diámetro de 30cm, y los dos manubrios un radio de 30cm.

El primer engranaje tiene una rueda de 60 dientes y un piñón de 12; el 2º una rueda de 60 dientes y un piñón de 10. — ¿Qué potencia ha de ejercer cada uno de los dos obreros para levantar una carga de 2100kg? Rendimiento 70%?

R. : 25kg.

149. — En los dos problemas anteriores, calcular el tiempo necesario para elevar la carga 5m, cuando el manubrio da 10 vueltas por minuto.

R. : 3m49s y 15m55s.

150. — Una grúa de vapor se compone de una polea móvil y de tres pares de engranajes :

El primero tiene una rueda de 1m de diámetro y un piñón de 20cm, el segundo una rueda de 80cm y un piñón de 15, el tercero una rueda de 60cm y un piñón de 12. El tambor tiene 40cm de diámetro, el manubrio del motor 18cm de radio. La carga es 15000kg, el rendimiento total 50%.

Se pregunta : 1º el esfuerzo medio sobre el manubrio del motor; — 2º la velocidad de elevación de la carga para 240 vueltas del motor por minuto.

R. : 125 y 1m,13.

151. — ¿Qué carga puede levantarse con un gato sencillo, ejerciendo un esfuerzo de 20kg? — El manubrio tiene 30cm de radio, el piñón 6cm de diámetro. El rendimiento es 80%.

R. : 160kg.

152. — ¿Qué esfuerzo ha de desarrollarse para levantar una carga de 720kg con un gato compuesto? El manubrio mide 40cm de radio, la rueda 12cm de diámetro, los piñones 4cm de diámetro. El rendimiento es 75%.

R. : 16kg.

§ 3. — Plano inclinado. — Tornillo.

153. — Un cuerpo de 100kg está colocado sobre un plano inclinado en que $\frac{h}{l} = \frac{2}{40}$. — 1º ¿Qué fuerza lo mantendrá en equilibrio si se prescinde del rozamiento? — 2º ¿Cuál es la presión sobre el plano?

R. 20kg y 98kg.

154. — Igual problema. La fuerza es horizontal, en vez de ser paralela al plano inclinado.

R. : 20kg,4 y 102kg.

155. — Un cuerpo de 100kg cuyo coeficiente de rozamiento es 0,02, está colocado sobre un plano inclinado de 5cm por metro. — ¿Qué esfuerzo hay que ejercer paralelamente al plano para hacerlo subir?

R. : 7kg.

156. — Un vagón de 15t es elevado en un plano inclinado 10cm por metro, por medio de un torno análogo al del nº 148. — Siendo el coeficiente de rozamiento 1/100, determínese el esfuerzo que ha de ejercerse sobre los manubrios.

R. : 49kg,6.

157. — ¿Qué presión ejerce una chaveta cuya pendiente es 1/15 con un esfuerzo de 12kg sobre su cabeza?

R. : 180kg.

158. — ¿Cuál es la fuerza lateral de una cuña isósceles cuya base mide 4cm y el lado 20cm, cuando se ejerce una presión de 50kg sobre la cabeza de la cuña?

R. : 250kg.

159. — ¿Qué esfuerzo puede producirse con un tornillo de 20mm de paso, cuando se ejerce una potencia de 12kg en el extremo de un brazo de palanca de 1m? Se prescinde del rozamiento.

R. : 3770kg.

160. — Igual problema. El rozamiento es 0,10; el diámetro medio del tornillo es 10 cm.

R. : 1457 kg; rendimiento 0,38.

161. — Un gato está compuesto de un tornillo de 15 mm de paso y una palanca de 1 m,50 de radio. — ¿Qué carga puede levantarse ejerciendo un esfuerzo de 30 kg, siendo el rendimiento 35 %?

R. : 6594 kg.

162. — En un tornillo diferencial, los dos tornillos tienen pasos h y h' . La potencia es $P = Q \frac{h - h'}{2\pi l}$. — ¿Qué potencia hay que ejercer en el extremo de una palanca $l = 50$ cm, para vencer una resistencia de 5000 kg? — Rendimiento 40 %; $h = 20$ mm y $h' = 15$ mm.

R. : 19 kg,9.

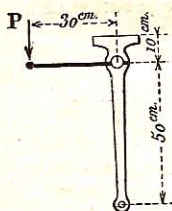
163. — Los elementos de un torno movido por un tornillo sin fin son:

Un tambor de 20 cm de diámetro; dos manubrios de 40 cm de radio; una rueda de tornillo sin fin de 50 dientes. — ¿Qué carga pueden levantar dos obreros que ejercen cada uno un esfuerzo de 25 kg, si el rendimiento es 40 %?

R. : 4000 kg.

164. — Con el torno del número anterior se desea arrastrar a lo largo de un plano inclinado 15 cm por metro un barco de 19 toneladas. El coeficiente de rozamiento es 0,10. Calcúlese: 1º El esfuerzo que ha de ejercerse sobre los manubrios; — 2º la velocidad de arrastre para 16 vueltas de manubrio por minuto.

R. : 29 kg,7 y 20 cm.



165. — Un obrero ejerce, en el brazo de un tornillo de banco cuyo paso es 6 mm, una potencia de 30 kg aplicada a 30 cm del eje. — Admitiendo un rendimiento de 1/3 para el tornillo, calcúlese: 1º El esfuerzo soportado por el tornillo; — 2º la presión transmitida a las mordazas.

R. : 3142 kg y 2618 kg.

DINÁMICA

DINÁMICA TEÓRICA

§ 1. — Trabajo. — Fuerza viva.

166. — Un obrero mueve un manubrio de torno con una velocidad lineal de $0^m,70$. Es capaz de un esfuerzo continuo de 10^k . — Calcúlese: 1º la potencia en kilográmetros; — 2º el trabajo durante 8 horas.

R. : 7^k y 201600^k gm.

167. — ¿Cuál es el trabajo, por segundo y por día de 8 horas, del mismo obrero que levanta un peso de 25^k a la velocidad de $0^m,20$ por medio de una polea?

R. : 5^k y 144000^k gm.

168. — Un hombre sube un saco de 60^k a 15^m de altura en 5 minutos. Puede hacer 8 viajes por hora durante 7 horas. — Determinése el trabajo que produce en cada viaje y durante el día. Peso del obrero 70^k .

R. : 1950^k y 109200^k gm.

169. — Un caballo tira de una lancha a la velocidad de $1^m,50$ por segundo. Ejerce un esfuerzo de 50^k sobre la cuerda que forma un ángulo de 20° con el eje de la lancha. — Se pregunta: 1º el esfuerzo de tracción según el eje; — 2º la potencia en caballos-vapor.

R. : 47^k o $0^{\text{cab}},94$.

170. — Dos caballos tiran de un coche, que pesa 1400^k y está cargado con 1600^k , a la velocidad de $5^k,400$ por hora. Siendo estimado en $1/30$ de la carga total el esfuerzo de tracción, cuál es el trabajo desarrollado por segundo?

R. 135^k o $1^{\text{cab}},8$.

171. — ¿Qué potencia necesita una bomba para elevar por minuto $1^m^3,200$ de agua a 15^m de altura, siendo el rendimiento mecánico de 75% ?

R. : 400^k o $5^{\text{cab}} 1/3$.

172. — Una correa transmite un esfuerzo de 100^k . Se arrolla sobre una polea de $1^m,60$ de diámetro, que da 120 vueltas por mi-

8. — PRONTUARIO DE MECÁNICA. — Nº 481.

nuto. — Se pregunta: 1º la velocidad por segundo; — 2º la potencia transmitida.

R. : $10^m, 053$ y $13^{cab}, 4$.

173. — Una rueda de engranaje, de 2^m de diámetro, transmite 50 caballos a la velocidad de 90 vueltas por minuto. — ¿Cuál es la fuerza tangencial sobre la dentadura?

R. : 398^{kg} .

174. — Una polea, de $1^m, 50$ de diámetro, transmite 25 caballos vapor; la correa de transmisión soporta un esfuerzo de 250^{kg} . — Determinese la velocidad angular de la polea y el número de vueltas por minuto.

R. : 10^m y $95^t 1/2$.

175. — ¿Cuál es en vatios la potencia de una máquina de 20 caballos de vapor?

R. : 14720 vatios.

176. — Determinar en caballos la potencia de una dinamo de 100 kilovatios.

R. : $135^{cab}, 87$.

177. — ¿Cuál es la potencia viva de una locomotora de 58860^{kg} cuya velocidad es 72^{km} por hora?

R. : 1200000^{kgm} .

178. — Un martillo de 2^{kg} , con una velocidad inicial de 2^m , da en un yunque después de una caída de $2/10^o$ de segundo. — ¿Qué energía cinética puede desarrollar?

R. : $1^{kgm}, 6$.

179. — Con el mismo martillo se introduce una clavija en una viga de roble. Siendo la penetración de 1^{cm} , determinar la resistencia media de la madera.

La resistencia media se considera como una fuerza constante cuyo trabajo absorbe la energía cinética.

R. : 160^{kg} .

180. — Una bala que pesa $95^r, 81$ sale del fusil con una velocidad de 500^m . El cañón tiene una longitud de 60^{cm} , y un diámetro interior de 10^{mm} . — ¿Cuál es la presión media de los gases por centímetro cuadrado?

R. : 265^{kg} .

181. — La acción de los frenos ha anulado la rotación de las ruedas de la locomotora del problema 177. — ¿Qué distancia recorrerá antes de su parada completa si se admite un rozamiento sobre los rieles de $f = 0,2$?

La resistencia al deslizamiento de las ruedas sobre los rieles produce un trabajo que absorbe la energía de la locomotora.

R. : 102^m .

182. — Una bala de $49^k,05$ alcanza una placa de blindaje con una velocidad de 400^m por segundo. La placa ofrece una resistencia media de 4000 toneladas a la penetración del proyectil. — Se pregunta: 1° la potencia viva en el momento del choque; — 2° la profundidad de la deformación de la placa.

R.: $400\,000^k\text{gm}$ y 10^m .

183. — Un río tiene un caudal de 10^m^3 por segundo con una velocidad de 2^m . — ¿Cuál es la potencia viva del río?

Compruébese que la potencia viva es igual al trabajo de la gravedad.

R.: $2\,038^k\text{gm},7$ o $27^{\text{cab}},2$.

184. — Una barra de acero se ensaya al choque con un martinete de 15^kg que cae de 2^m de altura. — ¿Cuál es la energía molecular almacenada después de seis golpes?

R.: 180^kgm .

185. — ¿Cuál es la potencia viva de un volante de 3 toneladas y de 3^m de diámetro medio, que gira a 60 vueltas por minuto?

R.: $13\,582^k\text{gm}$.

186. — ¿Qué energía cederá el volante anterior cuando la velocidad pase de 60 a 50 vueltas?

R.: $4\,150^k\text{gm}$.

187. — Un volante de 4^m de diámetro medio, pesa 5000 kilogramos y da 60 vueltas por minuto. Por medio de un freno se ejerce sobre la llanta un esfuerzo normal de $1\,500^k\text{g}$. — Se pregunta: 1° la potencia viva que posee; — 2° el número de vueltas del volante antes de su parada. Coeficiente de rozamiento $f=0,15$.

R.: $40\,244^k\text{gm}$ y $14^v,2$.

188. — Dos trenes van a chocar. Los conductores frenan cuando están a 100^m uno de otro. El primer tren marcha a 54^km por hora, la locomotora y los vagones pesan 250 toneladas; el segundo marcha a 36^km , la locomotora y los vagones pesan 350 toneladas. — ¿A qué distancia se detendrán uno de otro? El coeficiente de rozamiento $f=0,20$.

R.: $17^m,18$.

189. — Un vagón de 20 toneladas, lanzado por una vía horizontal con una velocidad de 15^m por segundo, recorre $76^m,50$ antes de detenerse. — ¿Cuál es la resistencia constante que experimenta?

R.: $3\,000^k\text{g}$ ($f=0,15$).

§ 2. — Projectiles. — Movimiento circular.

190. — Un proyectil de 1kg se lanza verticalmente con una velocidad inicial de 100m. — 1º ¿ A qué altura llega después de 5 segundos? — ¿ Cuál es su velocidad en dicho instante? — 3º ¿ Cuál es la variación de su energía cinética? ($g = 9,81$.)

R.: 377m,375; 50m,95; 377kgm,375.

191. — Un proyectil se lanza horizontalmente desde un punto situado a 44m,15 del suelo con una velocidad de 200m. — Se pregunta: 1º Después de cuantos segundos tocará el suelo; — 2º A qué distancia del punto de partida.

R.: 3s y 600m.

192. — ¿ Cuál es la velocidad del proyectil anterior cuando llegue al suelo? — ¿ Cuál será el ángulo de encuentro?

Se demostrará que $v = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}$ y que $v_0 \operatorname{tg} \alpha = gt$.

R.: 202m,06 y 8º 22' 15".

193. — ¿ Con qué velocidad hay que lanzar horizontalmente un proyectil para que llegue al suelo a 1200m de una torre de 78m,50?

R.: 300m.

194. — Un proyectil se lanza con una velocidad de 200m y bajo un ángulo de 30º. — Determinense: 1º la altura máxima de ascensión; — 2º la amplitud del tiro.

R.: 509m,68 y 3531m,06.

195. — Calcular la velocidad inicial y la altura de ascensión de un proyectil lanzado con un ángulo de 45º y que llega al suelo a 9174m,32 del punto de partida.

Demostrar que la altura es, en este caso, el cuarto de la amplitud.

R.: 300m y 2293m,58.

196. — El proyectil del problema anterior pesa 9kg,81. — Indíquese: 1º la velocidad en el punto culminante de su carrera; — 2º su energía cinética en dicho punto.

Demuéstrese que $v = \frac{v_0 \sqrt{2}}{2}$. Compárese la energía con el trabajo de la gravedad.

R.: 212m,13 y 22500kgm.

197. — Un proyectil se lanza con una velocidad inicial de 200m y un ángulo de 45º desde el vértice de una torre de 44m,15 de altura. — 1º ¿ Después de cuántos segundos tocará el suelo? — 2º ¿ A qué distancia del pie de la torre?

La ecuación de la trayectoria es : $y = x - \frac{gx^2}{v_0^2}$ ($y = -44^m, 15$).

El tiempo $t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$.

R. : $4032^m, 58$ y $28^s, 5$.

198. — ¿Cuál es, en París, la duración de las oscilaciones de un péndulo de $3^m, 796$ de longitud? ($g = 9,81$.)

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

R. : 2 segundos.

199. — ¿Cuál es, en el ecuador, la longitud del péndulo cuya oscilación dura un segundo? ($g = 9,781$.)

R. : $0^m, 991$.

200. — Un reloj que anda exactamente en París, se traslada al ecuador. — ¿Cuánto atrasará por día?

R. : 2 minutos.

201. — Una honda que contiene una piedra de $196^{\text{gr}}, 2$ está animada de un movimiento rotatorio de 30^{cm} de radio y da dos vueltas por segundo. — ¿Cuál es la tensión de la cuerda por la acción de la fuerza centrífuga sola?

El valor de la fuerza centrífuga es : $F = m \frac{v^2}{r}$.

R. : $947^{\text{gr}}, 5$.

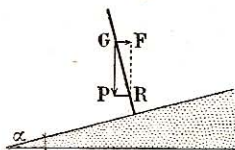
202. — Una locomotora que pesa 49050^{kg} recorre una curva de 500^{m} de radio con una velocidad de 15^{m} por segundo. — Calcúlese el valor de la fuerza centrífuga.

R. : 2250^{kg} .

203. — ¿Qué inclinación hay que dar a la vía para que la resultante del peso y de la fuerza centrífuga sea normal a la misma vía? (Se prescinde del rozamiento.)

R. :

$$\text{tg } \alpha = \frac{2250}{49050} = 0,046 \quad \text{o} \quad \alpha = 2^{\circ} 40'$$



204. — Un ciclista recorre una vuelta de 50^{m} de radio sobre una pista inclinada de $\text{tg } \alpha = 0,57$. — ¿Qué velocidad debe llevar para que la resultante del peso y de la fuerza centrífuga sea normal a la pista? (Se prescinde del rozamiento.)

Demostrar que $v^2 = gr \cdot \text{tg } \alpha$.

R. : $16^{\text{m}}, 7$ por segundo o 60^{km} por hora.

§ 3. — Movimiento sobre el plano inclinado.

205. — ¿Cuál es la aceleración del movimiento de un móvil que desciende por un plano inclinado, que forma un ángulo de 30° con la horizontal?

$$R.: \frac{g}{2} = 4^m,905.$$

206. — Un móvil que parte del reposo, desciende por un plano inclinado de 45° . Se pregunta: 1° la longitud que ha recorrido después de 2 segundos; — 2° su velocidad en dicho instante.

$$R.: 13^m,873 \text{ y } 13^m,873.$$

207. — Un plano inclinado, de $22^m,07$ de largo, es recorrido por un móvil en 3 segundos. — ¿Cuál es la inclinación del plano?

$$R.: 30^\circ.$$

208. — ¿Cuánto tiempo invierte un móvil para recorrer $9^m,81$ sobre un plano cuya inclinación $\frac{h}{l} = \frac{4}{9,81}$?

Deducir la aceleración de la relación $\frac{h}{l}$.

$$R.: 2^s \frac{2}{10}.$$

209. — Demostrar que un móvil que parte sin velocidad inicial del punto culminante de un círculo vertical, tarda el mismo tiempo en recorrer una cuerda cualquiera del círculo. — ¿Cuál es dicho tiempo constante?

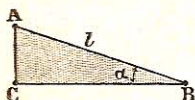
$$R.: t = 2 \sqrt{\frac{R}{g}}.$$

210. — Sobre un plano inclinado de un ángulo de 30° , se lanza un móvil de abajo arriba, siguiendo la línea de máxima pendiente, y con una velocidad inicial de $4^m,905$. — Determinense: 1° la duración de la ascensión del móvil; — 2° el recorrido sobre el plano inclinado hasta el final de la ascensión.

$$R.: 1^s \text{ y } 2^m,452.$$

211. — ¿Cuál es la potencia de una locomotora que tiene que remolcar sobre un plano horizontal, un tren de 300 toneladas (locomotora comprendida), a la velocidad horaria de 36^{km} ? — Coeficiente de rodamiento 0,007.

$$R.: 280 \text{ caballos.}$$



212. — ¿Qué trabajo suplementario habrá de emplear dicha locomotora para subir una pendiente de 1^{cm} por metro?

$$R.: 400 \text{ caballos.}$$

213. — Dos móviles recorren una línea de máxima pendiente de un plano inclinado de un ángulo de 30° . Al mismo instante el primero

queda abandonado en A sin velocidad inicial y el segundo se lanza desde D. de abajo arriba, con una velocidad inicial $v_0 = \sqrt{\frac{gl}{2}}$.

Demuéstrese que los móviles se encuentran en medio de AB.

DINÁMICA APLICADA

§ 1. — Potencia. — Rendimiento.

214. — Una máquina se ensaya con un freno Prony de 2^m de brazo de palanca. — A 100 vueltas por minuto, se mantiene la palanca horizontal con un peso de 100 kg. — ¿Cuál es el trabajo útil de la máquina?

R. : 27^{cab},92.

215. — ¿Qué peso hay que colocar en el platillo de un freno Prony, a 2^m,50 del árbol, para equilibrar 69^{cab},115 a 75 vueltas por minuto?

R. : 264 kg.

216. — Un motor produce 25^{cab}. Dicha potencia se ha medido con un freno que lleva un peso de 55^{kg},95 a la distancia de 2^m. — Calcúlese el número de vueltas del árbol por minuto.

R. : 160 vueltas.

217. — Un obrero que mueve un torno con una potencia de 20 kg y una velocidad circunferencial de 60 cm, levanta una carga de 180 kg con una velocidad de 3^m,60 por minuto. — ¿Cuál es el rendimiento del torno?

R. : 90 %.

218. — Una máquina de vapor produce 36^{cab} efectivos, medidos con el freno a la velocidad de 90 vueltas. El indicador de Watt señala un trabajo de 1200 kgm por embolada. — ¿Cuál es el rendimiento mecánico de esta máquina?

R. : 75 %.

219. — ¿Cuál es la potencia de una máquina de extracción de mina, capaz de subir 10 toneladas de carbón con una velocidad de 2^m,10 por segundo? — El rendimiento total de la instalación es 0,70.

R. : 400 caballos.

220. — Para elevar 75 litros de agua por segundo a cierta altura, hay que disponer de un motor de 15 caballos. Siendo el rendimiento de la bomba 80 %, determínese la altura de elevación.

R. : 12 metros.

221. — Para la alimentación de una población de 60 000 habitantes, que gastan diariamente 144 litros de agua cada uno, se dis-

pone de bombas que la elevan a 100 metros y trabajan sin descanso. — ¿Qué potencia han de suministrar si el rendimiento total de la instalación es 50 %?

R. : 266 cab 2/3.

222. — ¿Cuál es la potencia, en vatios y en caballos de vapor, de una dinamo que produce una corriente de 15 amperios con una tensión de 100 voltios? (1 vatio = 1 amp. \times 1 voltio.) El rendimiento de la dinamo es 0,80.

R. : 7700 vatios y 10 cab,4.

§ 2. — Motores hidráulicos.

223. — El canal de Jonage, cerca de Lyon, tiene una sección trapezoidal de 70 m y 80 m de bases y 3 m,50 de profundidad. La velocidad media del agua en el canal es 0 m,50 por segundo; el salto máximo en la fábrica hidroeléctrica es 10 m. — Se preguntan: 1º el caudal del canal; — 2º la potencia del salto.

R. : 131 m³,250 y 17500 caballos.

224. — Un salto de agua de 1 m,20 da 800 litros por segundo, y mueve una rueda por debajo con álabes planos. — ¿Cuál es la potencia recogida? Rendimiento 32 %.

R. : 4 cab,1.

225. — En el mismo salto de agua se instala una rueda Poncelet, de 4 m,85 de diámetro, que produce 7 cab,7. — Se preguntan: 1º el rendimiento de la rueda; — 2º el número de vueltas por minuto, para una velocidad circunferencial: $v = 0,5 \sqrt{2gh}$.

R. : 60 % y 9 \times 1/2.

226. — Una rueda Sagebien está alimentada por una compuerta que produce 12 hl por segundo. El salto total de agua mide 1 m,50 y el rendimiento de la rueda es 90 %. — ¿Cuál es la potencia de dicha rueda?

R. : 21 cab,6.

227. — ¿Cuál es el caudal de un depósito por un orificio rectangular de 1 m,50 \times 0,20 con una carga de 9 m,50 de altura. ? — La contracción de la vena líquida, a su paso por el orificio, da un rendimiento en volumen de 0,65.

R. : 610 litros.

228. — El agua del depósito anterior mueve una rueda de álabes y pasa después a un canal cuyo nivel está a 5 m por debajo del nivel del depósito. — ¿Cuál es la potencia que se puede recoger en la rueda? — Rendimiento 70 %.

R. : 28 cab,46.

229. — Una turbina recibe 1 m^3 de agua de un salto de 5 m . — ¿Qué potencia se obtendrá, con un rendimiento de 70% ?

R. : $46\text{ cab } 2/3$.

230. — Se desea instalar una turbina, de una potencia de 108 cal y un rendimiento de 75% , movida por un salto de 9 m . — Calcúlese el caudal de agua mínimo.

R. : $1\ 200$ litros.

231. — Una turbina recibe por segundo 700 litros, que caen desde $8\text{ m},50$ de altura y mueve una dinamo que produce una corriente de 405 amperios bajo 120 voltios, con un rendimiento eléctrico de 90% . — ¿Cuál es el rendimiento mecánico de la turbina?

R. : 75% .

232. — Para los grandes saltos se instalan ruedas turbinas Pelton, de velocidad circunferencial $1/2\sqrt{2gH}$ próximamente. — Determinese el diámetro de una rueda turbina para $H=100\text{ m}$ y 360 vueltas por minuto.

R. : $1\text{ m},17$.

233. — ¿Cuál es el caudal horario de una bomba de simple efecto de 25 cm de diámetro y 40 cm de carrera, que da 40 vueltas por minuto? — Rendimiento en volumen 95% .

R. : $44\text{ m}^3,767$.

234. — ¿Cuál es la potencia necesaria para elevar, a 15 m de altura, el agua suministrada por la bomba anterior? — Rendimiento mecánico 80% .

R. : $3\text{ cab},10$.

235. — ¿Qué diámetro hay que dar a una bomba de simple efecto de 20 cm de carrera para que produzca 2120 litros por hora, con una velocidad de 25 vueltas por minuto? — Rendimiento en volumen 90% .

R. : 10 cm .

236. — La bomba anterior eleva agua a 10 m . Es movida por un hombre que actúa sobre un manubrio de $0\text{ m},30$ de longitud. — ¿Qué esfuerzo ha de ejercer si el rendimiento mecánico es 60% ?

R. : $12\text{ kg},5$.

237. — Una bomba de incendios, con dos cuerpos de simple efecto, posee las características siguientes: Diámetro de un cuerpo : 50 cm . Carrera de los émbolos : 80 cm . — Número de vueltas por minuto : 20 . — Rendimiento en agua : $0,95$. — Rendimiento mecánico : $0,80$. — Determinar el caudal horario y la potencia necesaria para elevar el agua a 25 m .

R. : $358\text{ m}^3,142$ y $41\text{ cab},45$.

238. — Una bomba centrífuga es movida por una turbina de vapor que da 1800 vueltas por minuto; la rueda de álabes de 30^{cm} de diámetro posee una velocidad circunferencial de $V = 1,2 \sqrt{2gH}$. — ¿ A qué altura máxima podrá esta bomba elevar el agua?
R. : 28^m,3.

§ 3. — Máquinas de vapor. — Motores de gas.

239. — Una máquina de vapor, que tiene un cilindro de 40^{cm} de diámetro y 60^{cm} de carrera, trabaja a plena presión y escape libre. — Calcúlese : 1^o la presión media del vapor, si la contrapresión es de 1^{kg},2; — 2^o la potencia de la máquina a 90 vueltas por minuto, con una presión de admisión de 5^{kg}. — Rendimiento del diagrama 0,92, rendimiento mecánico 0,70.

R. : 3^{kg},5 y 73^{cab},85.

240. — ¿Cuál es el consumo de vapor, por hora, de la máquina anterior? — 1^o Por caballo indicado; — 2^o Por caballo efectivo. — El metro cúbico de vapor, a 5^{kg} de presión, pesa 2^{kg},750.

R. : 21^{kg},2 y 30^{kg},3.

241. — Una máquina de vapor a plena admisión tiene un cilindro de 15^{cm} de diámetro y de 20^{cm} de carrera; produce 6^{cab} 1/4 en condiciones siguientes : Presión de admisión del vapor : 5^{kg}. — Contrapresión de escape : 1^{kg},3. — Rendimiento del diagrama : 0,90. — Rendimiento mecánico : 0,66. — Determinese el número de vueltas por minuto.

R. : 180 vueltas.

242. — El cilindro de una máquina de vapor mide 40^{cm} de diámetro y 80^{cm} de carrera; el árbol motor da 120 vueltas por minuto. El vapor es admitido con 6^{kg} de presión y se expande a 1/2; la contrapresión en el condensador es de 0^{kg},25. — 1^o ¿Cuál es la presión media en el cilindro? — 2^o ¿Cuál es la potencia en caballos indicados? — El rendimiento de diagrama es 80 %.

R. : 3^{kg},86 y 206^{cab},9.

243. — ¿Cuál es el consumo de vapor por caballo hora de la máquina anterior. — El metro cúbico de vapor, a 6^{kg} de presión, pesa 3^{kg},263.

R. : 11^{kg},4.

244. — Calcúlese el consumo de vapor de dicha máquina si trabajara a plena presión, y determinese la economía de vapor producida por la expansión. — A plena presión, la máquina produce 282^{cab} indicados con 5^{kg},25 de presión media.

R. : 16^{kg},8 y 5^{kg},4.

245. — *Calcúlense las dimensiones de una máquina de vapor, de expansión y condensación, moviendo una dinamo que produce una corriente de 350 amperios u 500 voltios, con un rendimiento de 92 %.*

Las características de la máquina son las siguientes: Presión de admisión del vapor: 7 kg; — Contrapresión en el condensador: 0 kg,25. — Expansión: 1/5. — Rendimiento del diagrama: 0,80. — Rendimiento mecánico: 0,85. — Número de vueltas por minuto: 100. — Velocidad del émbolo por segundo: 3 m.

La presión media $p_m = (7 \text{ kg} \times 0,52 - 0,25) 0,80 = 2 \text{ kg},7$.

R.: 304 cab; D = 60 cm; C = 90 cm.

246. — *¿Cuál es la potencia de un motor de gas que tiene 20 cm de diámetro y 30 cm de carrera? La presión media es de 5 kg y el número de explosiones 100 por minuto. — Rendimiento mecánico: 0,7.*

R.: 10 cab,47 y 7 cab,33.

247. — *Un motor de automóvil de cuatro cilindros, de 100 mm de diámetro y de 120 mm de carrera, desarrolla una potencia de 21 caballos a 1000 vueltas. — ¿Cuál es la presión media del diagrama?*

Para determinar el número de explosiones, recuérdese que el ciclo es de cuatro tiempos.

R.: 5 kg.

248. — *Calcúlese, por medio de la fórmula: $P = D^2 \cdot C \cdot n \cdot k$, la potencia del motor de automóvil del problema anterior.*

D = 10 cm; C = 12 cm; n = 1000 vueltas; D = 0,0000044.

R.: 21 cab,12.

249. — *Un motor de 48 cm de diámetro y 70 cm de carrera desarrolla 100 caballos. — ¿Cuál es el número de vueltas por minuto, si la presión media es 4 kg,75?*

R.: 150 vueltas.

250. — *El motor anterior mueve una dinamo que alimenta una red a 110 voltios de tensión. — ¿Cuál será la intensidad en amperios? — Rendimiento del motor: 0,75; de la dinamo: 0,90.*

R.: 450 amperios.

ALFABETO GRIEGO

FIGURO		VALOR	APELACION
MAYUSC.	MINUSC.		
Α	α	a	<i>alpha</i>
Β	β, β̄	b	<i>bêta</i>
Γ	γ	g	<i>gamma</i>
Δ	δ	d	<i>delta</i>
Ε	ε	<i>é breve</i>	<i>epsilonn</i>
Ζ	ζ	dz	<i>dzêta</i>
Η	η	<i>è largo</i>	<i>êta</i>
Θ	θ	th	<i>thêta</i>
Ι	ι	i	<i>iôta</i>
Κ	κ	k	<i>kappa</i>
Λ	λ	l	<i>lambda</i>
Μ	μ	m	<i>mu</i>
Ν	ν	n	<i>nu</i>
Ξ	ξ	x	<i>ksi</i>
Ο	ο	<i>o breve</i>	<i>omicronn</i>
Π	π	p	<i>pi</i>
Ρ	ρ	r	<i>rô</i>
Σ	σ, ς	s	<i>sigma</i>
Τ	τ	t	<i>tau</i>
Υ	υ	u	<i>upsilonn</i>
Φ	φ	ph, f	<i>phi</i>
Χ	χ	<i>ch duro</i>	<i>khi</i>
Ψ	ψ	ps	<i>psi</i>
Ω	ω	<i>ô largo</i>	<i>ôméga</i>

ÍNDICE

DEL PRONTUARIO DE MECÁNICA TEÓRICA Y PRÁCTICA

INTRODUCCIÓN HISTÓRICA	
La Mecánica en la Antigüedad	V
La Mecánica en los tiempos modernos	V
La Mecánica industrial	VI

PRELIMINARES

TEORÍA DE LOS VECTORES

§ 1. — Magnitudes geométricas.

1. — Eje orientado	1
2. — Vector	1

§ 2. — Sumas y diferencias geométricas.

3. — Suma geométrica de vectores	2
4. — Diferencia geométrica de vectores concurrentes	4

§ 3. — Proyecciones de vectores.

5. — Proyección de un vector sobre un eje	5
6. — Teorema de las proyecciones	5

PRIMERA PARTE

CINEMÁTICA

Generalidades.

7. — Divisiones de la Mecánica	7
8. — Cinemática	7
9. — Unidad de tiempo	7
10. — Punto material. — Cuerpo sólido	8
11. — El movimiento es relativo	8
12. — Divisiones de la Cinemática	8

CAPÍTULO I

CINEMÁTICA DEL PUNTO MATERIAL

§ 1. — Movimiento de un punto.

13.	— Trayectoria de un punto	9
14.	— Ecuación del movimiento.	9

§ 2. — Movimiento rectilíneo.

15.	— Movimiento rectilíneo uniforme.	10
16.	— Diagramas del movimiento uniforme	11
17.	— Movimiento variado. — Velocidad	12
18.	— Movimiento variado. — Aceleración.	13
19.	— Movimiento uniformemente variado.	14
20.	— Diagrama del movimiento uniformemente variado.	15
21.	— Discusión del movimiento uniformemente variado.	17

§ 3. — Caída de los cuerpos.

22.	— Aparato de Morín.	17
23.	— Movimiento vertical de un punto grave.	19
24.	— <i>Problemas sobre la caída de los cuerpos</i>	20

§ 4. — Movimiento curvilíneo.

25.	— Movimiento curvilíneo. — Velocidad	21
26.	— Aceleración. — Hodógrafa	22
27.	— Movimiento circular uniforme. — Velocidades	23
28.	— Aceleración centrípeta. Hodógrafa.	24
29.	— <i>Problemas sobre el movimiento curvilíneo</i>	25

CAPÍTULO II

CINEMÁTICA DEL CUERPO SÓLIDO

§ 1. — Movimiento de traslación.

30.	— Traslación de un cuerpo sólido	26
31.	— Velocidades y aceleraciones.	27

§ 2. — Movimiento de rotación.

32.	— Rotación de un sólido alrededor de un eje	28
-----	-------------------------------------------------------	----

§ 3. — Movimiento helicoidal.

33.	— Movimiento helicoidal de un sólido.	29
34.	— Sentido del arrollamiento. — Velocidades.	31

CAPÍTULO III

COMPOSICIÓN DE LOS MOVIMIENTOS

§ 1. — Movimientos rectilíneos.

35. — Movimientos relativos	32
36. — Composición de movimientos uniformes	33
37. — Composición de movimientos uniformemente variados.	34

§ 2. — Movimientos curvilíneos.

38. — Composición de las velocidades.	35
39. — Velocidades sobre la cicloide	35

CAPÍTULO IV

CINEMÁTICA APLICADA

§ 1. — Engranajes.

I. — GENERALIDADES

40. — Clasificación de los mecanismos	37
41. — Ruedas de fricción. — Engranajes	39
42. — Clasificaciones de los engranajes	40
43. — Definiciones de la dentadura	40
44. — Paso circunferencial. — Paso diametral.	41
45. — Velocidades de las ruedas de fricción y de engranaje	41
46. — Tren de ruedas dentadas.	42
47. — <i>Problemas sobre los engranajes</i>	43

II. — TRAZADO DE LOS ENGRANAJES CILÍNDRICOS

48. — Principio del trazado de las dentaduras	44
49. — Curvas cicloidales	44
50. — Evolvente de círculo	46
51. — Engranajes de perfil cicloidal	46
52. — Engranajes de evolvente de círculo	48
53. — Ventajas del engranaje de evolvente.	49
54. — Cremallera	49

III. — ENGRANAJES CÓNICOS Y HELIZOIDALES

55. — Engranajes cónicos.	50
56. — Engranajes de tornillo sin fin	52
57. — Engranajes especiales	52

§ 2. — Levas.

58. — Clasificación de las levas.	54
-------------------------------------------	----

I. — LEVAS DE RODILLOS.

59.	— Problema de las levas	54
60.	— Leva de corazón	56
61.	— Leva Morán	56

II. — LEVAS O EXCÉNTRICAS DE CUADRO.

62.	— Excéntrica circular de cuadro	57
63.	— Excéntrica triangular de cuadro	57

§ 3. — Poleas de transmisión.

64.	— Transmisión por enlaces flexibles	59
65.	— Transmisión por correas	60
66.	— Transmisiones con poleas guías	61
67.	— Velocidad de las poleas	62
68.	— Poleas locas. — Conos de poleas	62
69.	— <i>Problemas sobre las poleas</i>	63

§ 4. — Mecanismos articulados.

I. — BIELA, MANUBRIO, EXCÉNTRICA.

70.	— Bielas de acoplamiento	64
71.	— Biela y Manubrio	64
72.	— Diagrama del movimiento	66
73.	— Excéntrica circular de collar	66
74.	— Corredera o Colisa de Stephenson	67

II. — PARALELOGRAMOS ARTICULADOS.

75.	— Paralelogramo de Watt	68
76.	— Inversor o rombo de Peaucellier	69
77.	— Inversor de Hart	70

SEGUNDA PARTE

ESTÁTICA

CAPÍTULO I

ESTÁTICA DEL PUNTO MATERIAL

§ 1. — Fuerza y masa.

I. — PRINCIPIO DE LA INERCIA

78.	— Estática. — Principio de la inercia	71
79.	— Fuerza	72
80.	— Masa	72
81.	— Fuerza constante	73
82.	— Principio de igualdad de la acción y de la reacción	73

II. — UNIDADES DE MEDIDA. — SISTEMA C. G. S.

83. — Peso	73
84. — Medida estática de las fuerzas	74
85. — Medida de las masas	75
86. — Unidades fundamentales en Mecánica	75
87. — Sistema métrico	75
88. — Sistema C. G. S.	76

§ 2. — Composición de fuerzas.

89. — Principio de la independencia de los efectos de las fuerzas.	76
90. — Composición de fuerzas.	76
91. — Composición de fuerzas concurrentes	77
92. — Resultante de dos fuerzas concurrentes	77
93. — Resultante de tres fuerzas concurrentes	78
94. — Resultante de un sistema de fuerzas concurrentes.	78
95. — Descomposición de una fuerza.	79
96. — <i>Problemas sobre las fuerzas concurrentes</i>	79

§ 3. — Equilibrio del punto material.

97. — Equilibrio de un punto material libre	80
98. — Equilibrio de dos o tres fuerzas	80
99. — Equilibrio de un punto sobre una curva o una superficie.	81

§ 4. — Momentos de las fuerzas.

100. — Momento con relación a un punto	82
101. — Teorema de Varignon.	82
102. — Momento respecto de un eje.	85

CAPÍTULO II

ESTÁTICA DEL CUERPO SÓLIDO

§ 1. — Fuerzas paralelas. — Pares.

I. — COMPOSICIÓN DE FUERZAS

103. — Axioma de reduccion de las fuerzas	86
104. — Composición de dos fuerzas paralelas y de igual sentido	87
105. — Composición de dos fuerzas paralelas, desiguales y de sentido contrario	88
106. — Composición de un sistema de fuerzas paralelas. — Centro de fuerzas paralelas.	89

II. — DESCOMPOSICIÓN DE FUERZAS

107. — Descomposición de una fuerza en dos fuerzas paralelas.	90
108. — Descomposición de una fuerza en un sistema de fuerzas paralelas.	91
109. — <i>Problema sobre las fuerzas paralelas</i>	92

III. — MOMENTOS. — CENTRO DE FUERZAS PARALELAS

110. — Momento de una fuerza respecto de un plano	92
111. — Teorema de Varignon	93
112. — Coordenadas del centro de fuerzas paralelas.	94

IV. — PARES DE FUERZAS.

113. — Eje de un par de fuerzas	95
114. — Pares equivalentes	96
115. — Composición de pares	96

§ 2. — Reducción de fuerzas cualesquiera.

116. — Resultante general y momento resultante	96
117. — Sistema de fuerzas equivalentes	97
118. — Traslado de una fuerza	97
119. — Reducción de las fuerzas aplicadas a un sólido.	98

§ 3. — Equilibrio de un cuerpo sólido.

120. — Equilibrio de un sólido libre	99
121. — Equilibrio de un sólido que tiene un punto fijo	99
122. — Equilibrio de un sólido que tiene un eje fijo.	100
123. — Equilibrio de un sólido que descansa sobre un plano.	101
124. — <i>Problema. — Equilibrio de una grúa</i>	102

CAPÍTULO III

CENTROS DE GRAVEDAD

§ 1. — Líneas planas.

125. — Centro de gravedad de un cuerpo.	103
126. — Determinación del centro de gravedad.	104
127. — Centro de gravedad de las líneas y superficies.	104
128. — Principios de investigación	105
129. — Perímetros de las figuras con centro	105
130. — Perímetro del triángulo.	105
131. — Línea poligonal regular.	105
132. — Arco de círculo.	106

§ 2. — Superficies planas.

133. — Superficies que tienen un centro de figura	107
134. — Superficie del triángulo.	107
135. — Trapecio.	107
136. — Cuadrilátero	108
137. — Sector poligonal regular	109
138. — Sector circular	109
139. — Cuerpos de revolución. — Zona esférica	110

§ 3. — Volúmenes.

140. — Prisma. — Cilindro	110
141. — Pirámide. — Cono	111
142. — Sector esférico y semiesfera.	112
143. — Teoremas de Guldin	113
144. — <i>Problemas sobre los centros de gravedad</i>	113

CAPÍTULO IV

ESTÁTICA DE LAS MÁQUINAS

§ 1. — Palanca. — Balanza.

145.	— Clasificación de las máquinas	115
146.	— Palanca	116
147.	— Tres géneros de palancas.	116
148.	— Balanza ordinaria.	117
149.	— Balanza de Roberval	118
150.	— Balanza romana.	119
151.	— Báscula de Quintenz	120
152.	— Báscula romana de Beranger	121
153.	— <i>Problemas sobre la palanca</i>	122

§ 2. — Polea. — Torno.

154.	— Polea fija.	123
155.	— Polea móvil	124
156.	— Polipasto.	125
157.	— Polipasto diferencial	126
158.	— Torno sencillo	127
159.	— Torno de los canteros.	128
160.	— Torno de engranajes	129
161.	— Torno diferencial	130
162.	— Gato	131
163.	— Cabria	132
164.	— Grúa.	132
165.	— <i>Problemas sobre la polea y el torno.</i>	133

§ 3. — Plano inclinado. — Tornillo.

166.	— Equilibrio sobre el plano inclinado	134
167.	— Cuña	136
168.	— Tornillo	136
169.	— Rozamiento de deslizamiento	137
170.	— Leyes del rozamiento de deslizamiento	138
171.	— Equilibrio sobre el plano inclinado con rozamiento	138
172.	— Equilibrio del tornillo con rozamiento	138
173.	— <i>Problemas sobre el plano inclinado y el tornillo</i>	139

TERCERA PARTE

DINÁMICA

CAPÍTULO I

DINÁMICA DEL PUNTO MATERIAL

§ 1. — Trabajo. — Fuerza viva.

174. — Noción de trabajo.	141
175. — Unidades de trabajo	142
176. — Trabajo de una fuerza constante.	142
177. — Trabajo de una fuerza variable	143
178. — Casos particulares	144
179. — Diagrama del trabajo	145
180. — Trabajo de una resultante	145
181. — Fuerza viva de un punto material	146
182. — Caso de una fuerza constante	146
183. — Caso de una fuerza variable.	147
184. — Caso de una resultante	147
185. — Fuerza viva de un sistema de puntos materiales	148

§ 2. — Movimiento de un punto material.

186. — Movimiento vertical de un punto material en el vacío.	148
187. — Movimiento parabólico de un punto material en el vacío.	149
188. — Altura y amplitud del tiro.	150
189. — <i>Problema. — Parábola de seguridad</i>	151
190. — Péndulo simple o circular.	152
191. — Velocidad del péndulo	153
192. — Fuerza centrípeta. — Fuerza centrífuga	154
193. — Movimiento de un punto material sobre un plano inclinado sin rozamiento	154
194. — <i>Problemas sobre el movimiento de un cuerpo material</i>	156

CAPÍTULO II

DINÁMICA DE LOS MOTORES INDUSTRIALES

§ 1. — Ecuación del trabajo de una máquina.

195. — Trabajo motor y trabajo resistente.	158
196. — Ecuación del trabajo de una máquina.	159
197. — Medición del trabajo útil. — Freno de Prony	159
198. — Rendimiento mecánico de una máquina.	160
199. — Reguladores y volantes	161

§ 2. — Bombas. — Motores hidráulicos.

200. — Clasificación de las máquinas hidráulicas	161
------------------------------------------------------------	-----

I. — BOMBAS

201. — Bombas de émbolo	162
202. — Bombas centrifugas	164
203. — Bombas rotativas	165

II. — RUEDAS HIDRÁULICAS

204. — Clasificación de los motores hidráulicos	168
205. — Potencia de un salto de agua	168
206. — Ruedas hidráulicas	168
207. — Ruedas por debajo. — Rueda de Poncelet	169
208. — Ruedas de costado. — Rueda de Sagebien	169
209. — Ruedas por encima. — Ruedas de cabeza de agua	170

III. — TURBINAS HIDRÁULICAS

210. — Turbinas	171
211. — Turbinas radiales. — Turbina de Fourneyron	172
212. — Turbinas axiales. — Turbina de Fontaine	173
213. — Turbinas mixtas o americanas	174
214. — Ruedas turbinas	175
215. — Instalaciones hidráulicas	176

§ 3. — Máquinas de vapor.

216. — Máquinas térmicas	178
------------------------------------	-----

I. — CALDERAS

217. — Calderas de vapor	179
218. — Calderas cilíndricas; de hogar interior; semi-tubulares	179
219. — Calderas tubulares y multitubulares	180

II. — MÁQUINAS DE ÉMBOLO

220. — Clasificación de las máquinas de vapor	182
221. — Distribución del vapor por corredera plana	186
222. — Funcionamiento de la distribución por corredera	186
223. — Trabajo de una máquina a plena presión	188
224. — Diagrama teórico de una máquina de expansión	188
225. — Trabajo de una máquina de expansión	189
226. — Diagrama real. Indicador de Watt	190

III. — TURBINAS DE VAPOR

227. — Turbinas de vapor	192
228. — Turbina de Laval	192
229. — Turbina de Parsons	193

§ 4. — Motores de gas y de petróleo.

230. — Motores de explosión. — Ciclo de cuatro tiempos	195
231. — Descripción de los motores	196
232. — Motores de gas	198
233. — Motores de petróleo	200
234. — Motor Diesel	201
235. — Diagrama teórico de los motores de cuatro tiempos	202
236. — Trabajo de los motores de explosión	203

PROBLEMAS**CINEMÁTICA****Cinemática teórica.**

1. — Movimiento uniforme	204
2. — Movimiento uniformemente acelerado.	205
3. — Movimiento circular	206
4. — Composición de los movimientos	207

Cinemática aplicada.

1. — Engranajes	208
2. — Levas y poleas.	210

ESTÁTICA**Estática teórica.**

1. — Fuerza. — Masa	212
2. — Fuerzas concurrentes	213
3. — Fuerzas paralelas	214
4. — Momentos. Equilibrios	215
5. — Centros de gravedad.	217

Estática aplicada.

1. — Palanca. — Balanza	218
2. — Polea. — Torno	220
3. — Plano inclinado. — Tornillo	223

DINÁMICA**Dinámica teórica.**

1. — Trabajo. — Fuerza viva	225
2. — proyectiles. — Movimiento circular.	228
3. — Movimiento sobre el plano inclinado	230

Dinámica aplicada.

1. — Potencia. — Rendimiento	231
2. — Motores hidráulicos	232
3. — Máquinas de vapor. — Motores de gas.	234